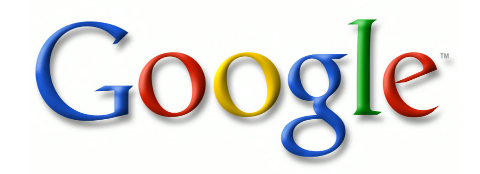
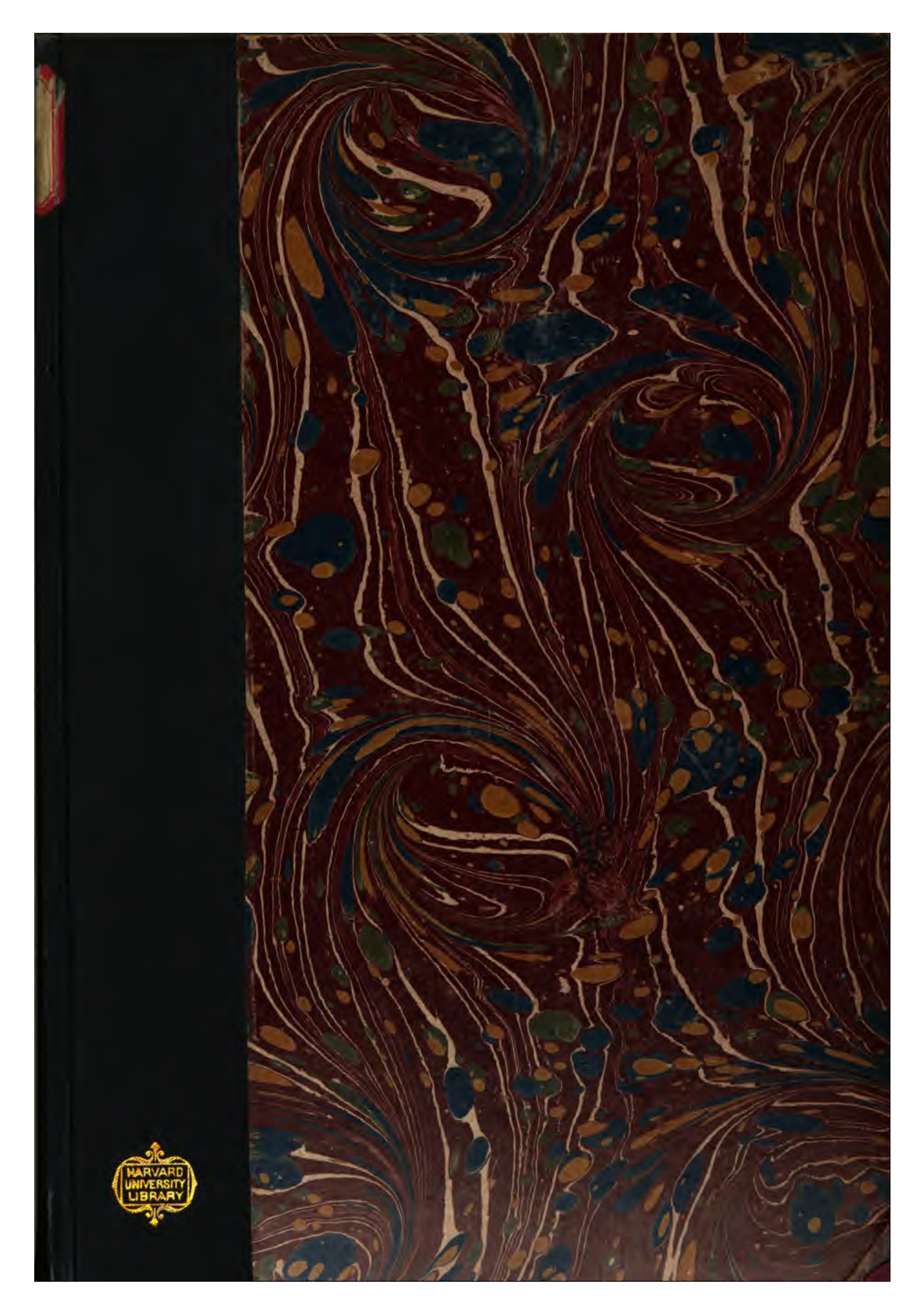
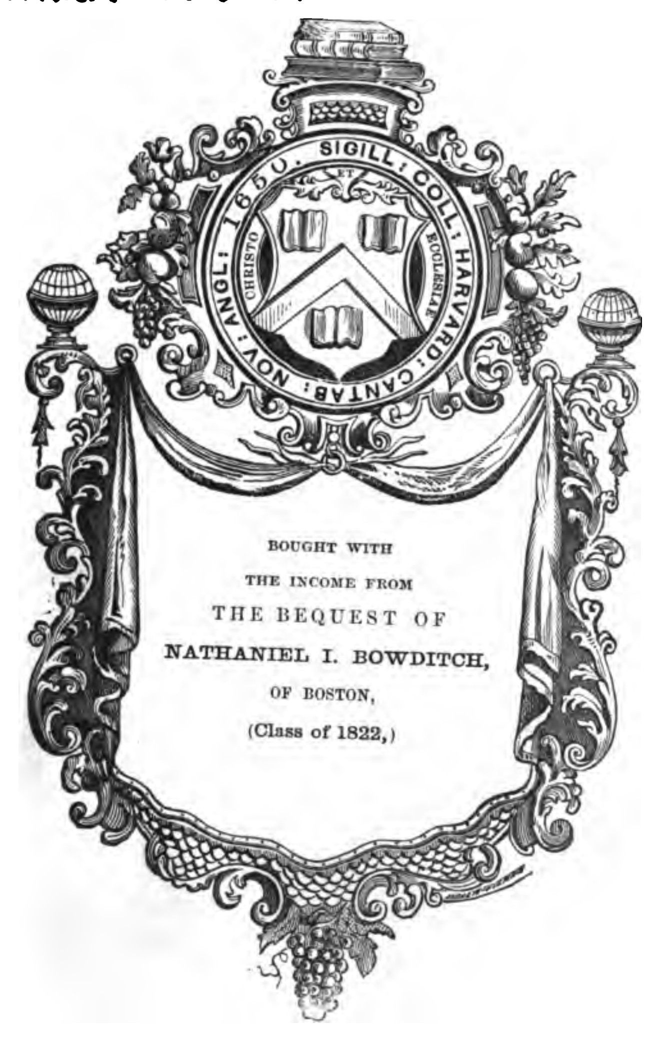
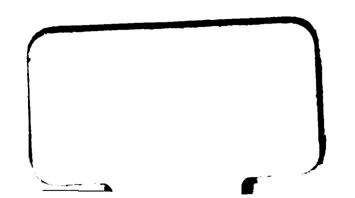



HARVARD
UNIVERSITY
LIBRARY


SIGILL: COLL: HARVARD: CANTAB: NOV: ANGL: 1650.
CHRISTO ET ECCLESIAE
BOUGHT WITH
THE INCOME FROM
THE BEQUEST OF
NATHANIEL I. BOWDITCH,
OF BOSTON,
(Class of 1822,)



Invariante Flächen und Curven

bei

conformen Gruppen des Raumes.

Inaugura Dissertation

zur Erlangung der Doctorwürde
der hohen philosophischen Facultät der Universität Leipzig

vorgelegt

von

HUGO STENDER.

LEIPZIG
Druck von Breitkopf & Härtel
1899.

Einleitung.

Wir wollen hier alle Flächen und Curven bestimmen, die eine continuierliche Gruppe von conformen Punkttransformationen gestatten. Der Hauptgrund, der meinen hochverehrten Lehrer Prof. Lie veranlasste, mir diese Aufgabe zu stellen, ist in dem Umstande zu suchen, dass ihre Lösung von Wichtigkeit für die Potentialtheorie ist. Das Problem lässt sich folgendermassen in Angriff nehmen.

Die von Lie entdeckte Berührungstransformation:

$$\begin{cases} X + iY + xZ + z = 0 \\ x(X - iY) - Z - y = 0 \end{cases}$$

besitzt die merkwürdige Eigenschaft, die zehngliedrige Gruppe $\mathfrak{G}_{10}$ aller conformen Punkttransformationen des Raumes (X, Y, Z), welche also den Complex

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = 0$$

und somit die Schar aller Minimalgeraden invariant lassen, in die zehngliedrige Gruppe Γ_{10} aller derjenigen projektiven Transformationen des Raumes (x, y, z) überzuführen, die den linearen Complex

$$x\,dy - y\,dx + dz = 0$$

in Ruhe lassen. Eine ausführliche Ableitung und Charakterisierung dieser Berührungstransformation findet man in einem Werke von S. Lie[1]; hier wollen wir uns darauf beschränken, auf Grund dieses Werkes die wichtigsten Gebilde einander gegenüber zu stellen, welche sich vermöge jener Zuordnung in den beiden Räumen (x, y, z) und (X, Y, Z) entsprechen.

1) S. Lie, Geometrie der Berührungstransformationen, dargestellt von S. Lie und G. Scheffers. I. Bd.

1*

Raum (x, y, z)	Raum (X, Y, Z)
1) Punkt.	1) Minimalgerade.
2) Gerade, die dem linearen Complex angehört.	2) Punkt.
3) Krumme Curve des linearen Complexes.	3) Krumme Minimalcurve.
4) Fläche ω_1 und ihre hinsichtlich des linearen Complexes reciproke Fläche ω_2.	4) Fläche Ω.
5) Die Complexgeraden, welche ω_1 und ω_2 zugleich berühren.	5) Die Punkte von Ω.
6) Die Punkte von ω_1 und ω_2.	6) Die Ω berührenden Minimalgeraden.
7) Nichtabwickelbare Regelfläche, deren Erzeugende dem linearen Complex angehören.	7) Curve, die keine Minimalcurve ist.
8) Curve, die keine Complexcurve ist, und die dazu reciproke abwickelbare Fläche.	8) Nichtabwickelbare Regelfläche, deren Erzeugende Minimalgeraden sind.
9) Zwei reciproke Polaren.	9) Kugel.

Den Flächen und Curven des Raumes (X, Y, Z) entsprechen also im Raume (x, y, z) ebenfalls Flächen oder Curven, abgesehen von der einzigen Ausnahme, dass den Complexgeraden in jedem Raume nur die Punkte des anderen Raumes zugeordnet sind. Wir können also unser Problem in der Weise lösen, dass wir zunächst alle Flächen und Curven bestimmen, die eine Untergruppe der Gruppe Γ_{10} des linearen Complexes gestatten, und hinterher durch Ausübung unserer Berührungstransformation die entsprechenden Gebilde im Raume (X, Y, Z) aufsuchen.

Nehmen wir zunächst an, es handele sich darum, überhaupt alle Untergruppen von Γ_{10} zu bestimmen. Unter der Voraussetzung, dass alle Typen von projektiven Gruppen bekannt seien, liesse sich diese Aufgabe in folgender Weise erledigen: Wir greifen unter allen projektiven Gruppen diejenigen heraus, die überhaupt einen oder mehrere lineare Complexe invariant lassen. Jeder Typus, der nur einen einzigen

invarianten linearen Complex besitzt — spezielle Complexe sind natürlich auszuschliessen —, liefert ohne weiteres eine Untergruppe von Γ_{10}; denn dazu bedarf es ja nur der Ausübung einer linearen Transformation, welche eben den invarianten Complex in die Normalform

$$C \equiv x\,dy - y\,dx + dz = 0$$

überführt.

Nicht ganz so einfach gestaltet sich die Sache, wenn eine projektive Gruppe mehrere lineare Complexe invariant lässt. Dann haben wir jeden einzelnen unter diesen auf die Normalform zu bringen und erhalten so mehrere Untergruppen von Γ_{10}. Nun ist es allerdings denkbar, dass diese Typen teilweise mit einander gleichberechtigt sind, d. h. sich durch eine solche projektive Transformation in einander überführen lassen, die den linearen Complex C in Ruhe lässt. Es liege etwa die Gruppe g mit den beiden invarianten Complexen $M = 0$ und $N = 0$ vor. Durch die projektiven Transformationen S bezüglich T mögen dieselben in die Normalform C übergeführt werden, während g dabei in g' bezüglich g'' übergeht. Also es sei

$$(M)\,S = C, \quad (g)\,S = g'; \quad (N)\,T = C, \quad (g)\,T = g''.$$

Sind nun g' und g'' vermöge einer Transformation R, die den Normalcomplex C invariant lässt, gleichberechtigt, so ist also

$$(g')\,R = g'', \quad (C)\,R = C.$$

Es folgt nunmehr durch Combination dieser Formeln:

$$N = (C)\,T^{-1} = (C)\,RT^{-1} = (M)\,SRT^{-1};$$
$$(g)\,SRT^{-1} = (g')RT^{-1} = (g'')\,T^{-1} = g;$$

d. h. der lineare Complex $M = 0$ lässt sich durch eine solche projektive Transformation in den anderen Complex $N = 0$ überführen, welche die Gruppe g invariant lässt. Geht man den umgekehrten Weg, so folgt aus dem Vorhandensein einer solchen Transformation rückwärts die Gleichberechtigung von g' und g''.

Es liege beispielsweise die eingliedrige projektive Gruppe

$$(x - z)\,p + q + zr$$

vor. Die allgemeine Gleichung eines linearen Complexes lautet:

$$L \equiv A(y\,dz - z\,dy) + B(z\,dx - x\,dz) + C(x\,dy - y\,dx)$$
$$+ D\,dx + E\,dy + G\,dz = 0.$$

Lassen wir x, y, z bezüglich um $\xi\,\delta t$, $\eta\,\delta t$, $\zeta\,\delta t$ wachsen, so folgt durch Variation:

$$A(\eta\,dz - \zeta\,dy + y\,d\zeta - z\,d\eta) + B(\zeta\,dx - \xi\,dz + z\,d\xi - x\,d\zeta)$$
$$+ C(\xi\,dy - \eta\,dx + x\,d\eta - y\,d\xi) + D\,d\xi + E\,d\eta + G\,d\zeta\,.$$

Dieser Ausdruck muss verschwinden vermöge der Gleichung des linearen Complexes, wenn derselbe die infinitesimale Transformation

$$\xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \zeta\frac{\partial f}{\partial z}$$

gestatten soll. In unserem Falle erhalten wir also, wenn wir zur Abkürzung

$$\varphi \equiv y\,dz - z\,dy\,, \quad \psi \equiv z\,dx - x\,dz\,, \quad \chi \equiv x\,dy - y\,dx$$

setzen, folgende Bedingung:

$$(A + C)\varphi + 2B\psi + C\chi + (D - C)\,dx + (A + G - D)\,dz = \varrho \cdot L.$$

Die Constanten dürfen nur so bestimmt werden, dass sie nicht die Bedingungsgleichung des speziellen linearen Complexes, nämlich

$$AD + BE + CG = 0$$

erfüllen. Man findet ohne Mühe, dass nur folgender Fall möglich ist:

$$\varrho = 1\,, \quad B = 0\,, \quad C = 0\,, \quad E = 0\,, \quad A = D\,.$$

Demnach hat der allgemeinste bei unserer Gruppe invariant bleibende lineare Complex die Gleichung

$$y\,dz - z\,dy + dx + \lambda\,dz = 0\,.$$

Jeder einzelne unter diesen ∞^1 Complexen lässt sich aber durch eine passende Translation längs der y-Axe auf die Form

$$y\,dz - z\,dy + dx = 0$$

bringen, während die eingliedrige Gruppe völlig ungeändert bleibt. Nach dem Vorhergehenden sind also die invarianten Complexe als gleichberechtigt anzusehen; wir haben etwa nur die letzte Form zu berücksichtigen. Durch Vertauschung von x, y, z mit z, y, $-x$ geht diese in die Normalform über, während die Gruppe die Gestalt

$$(x + z)\,r + q + xp$$

annimmt. Aus jener projektiven Gruppe geht folglich nur diese eine Untergruppe von Γ_{10} hervor.

Hat man nun in dieser Weise alle Untergruppen der Gruppe Γ_{10} aufgestellt, so würden also in jedem einzelnen Falle die invarianten Flächen und Curven zu bestimmen sein; ausserdem müsste jedesmal durch eine genaue Untersuchung festgestellt werden, ob die gefundenen invarianten Gebilde nicht etwa eine grössere Untergruppe von Γ_{10} gestatten — ein Verfahren, das ziemlich viel Rechnung verursachen würde. Da ferner die Bestimmung aller projektiven Gruppen des Raumes bisher im Einzelnen noch nicht völlig veröffentlicht ist, so ziehen wir es vor, folgenden wesentlich einfacheren Weg einzuschlagen.

Wir gehen direkt aus von allen Flächen und Curven, die Gruppen von projektiven Transformationen gestatten. Ihre Bestimmung ist von Lie längst vollständig geleistet; ebenso sind auch alle Untergruppen der zu jenen invarianten Flächen und Curven gehörigen Gruppen aufgestellt. Bei jedem invarianten Gebilde verwerten wir zunächst die grössten Untergruppen der zugehörigen Gruppe g, die überhaupt invariante lineare Complexe besitzen; von den niederen Untergruppen sind dann jedesmal nur noch diejenigen zu berücksichtigen, die unter ihren invarianten Complexen solche enthalten, welche keine höhere Untergruppe von g gestatten.

Die Überführung einer Gruppe des Raumes (x, y, z) in die entsprechende des Raumes (X, Y, Z) geschieht am einfachsten in folgender Weise. Die Coordinaten beider Räume sind gegenseitig gebunden an die Gleichungen

$$(1) \qquad \begin{cases} X + iY + xZ + z = 0 \\ x(X - iY) - Z - y = 0\,. \end{cases}$$

Durch Variation folgt

$$(2) \qquad \begin{cases} \delta X + i\,\delta Y + x\delta Z + Z\delta x + \delta z = 0 \\ x(\delta X - i\,\delta Y) + (X - iY)\,\delta x - \delta Z - \delta y = 0\,. \end{cases}$$

Substituieren wir jetzt für δx, δy, δz ihre Werte $\xi\,\delta t$, $\eta\,\delta t$, $\zeta\,\delta t$, so muss (2) eine Folge von (1) werden. Lösen wir also etwa (1) nach y und z auf und setzen in (2) ein, so müssen die sich ergebenden Gleichungen für alle Werte von x identisch bestehen. Die daraus entstehenden Bedingungen ergeben δX, δY, δZ ausgedrückt durch die X, Y, Z allein. Setzen wir zur Abkürzung

$$D_x \equiv ZQ - YR;\quad D_y \equiv XR - ZP;\quad D_z \equiv YP - XQ;$$
$$U \equiv XP + YQ + ZR;\quad U' \equiv xp + yq + zr;$$
$$V_x \equiv 2XU - (X^2 + Y^2 + Z^2)P;\quad V_y \equiv 2YU - (X^2 + Y^2 + Z^2)Q;$$
$$V_z \equiv 2ZU - (X^2 + Y^2 + Z^2)R;$$

so vermittelt die folgende Übersicht eine holoëdrisch isomorphe Beziehung zwischen den infinitesimalen Transformationen der Gruppe Γ_{10} und denen der Gruppe $\mathfrak{G}_{10}$:

$p-yr$	$q+xr$	$-r$	xq	$xp+zr$	$yq+zr$	$-yp$	$-zU'$	$zp-yU'$	$zq+xU'$
D_y+iD_x	$-R$	$\frac{1}{2}(P-iQ)$	$\frac{1}{2}(P+iQ)$	iD_z	U	$\frac{1}{2}(V_x-iV_y)$	$\frac{1}{2}(V_x+iV_y)$	V_z	D_y-iD_x

Jeder infinitesimalen Transformation des Raumes (x, y, z), die sich linear aus den Symbolen der oberen Reihe zusammensetzt, entspricht im Raume (X, Y, Z) diejenige infinitesimale conforme Transformation, die sich linear mit denselben Constanten aus den zugehörigen Symbolen der unteren Reihe zusammensetzt.

Zur Transformation der Flächen und Curven des Raumes (x, y, z) in die entsprechenden Gebilde des Raumes (X, Y, Z) bemerken wir folgendes. Liegt eine Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$ vor, so liefern alle ihre Tangenten, die dem linearen Complex angehören, je einen Punkt X, Y, Z des anderen Raumes. Nun hat jede Complexgerade in den laufenden Coordinaten $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ die Gleichungen:

$$(1)\qquad \begin{cases} X + iY + \mathfrak{x}Z + \mathfrak{z} = 0 \\ \mathfrak{x}(X - iY) - Z - \mathfrak{y} = 0. \end{cases}$$

Daraus folgt für die Richtungscosinus dieser Geraden:

$$\alpha : \beta : \gamma = 1 : (X - iY) : (-Z).$$

Da die Gerade aber zugleich Tangente in einem Punkte x, y, z der Fläche $\varphi = 0$ ist, so besteht die Beziehung:

$$\alpha \cdot \varphi_x + \beta \cdot \varphi_y + \gamma \cdot \varphi_z = 0,$$

also wird:

$$(2)\qquad \varphi_x + (X - iY)\,\varphi_y - \varphi_z \cdot Z = 0.$$

Der Berührpunkt x, y, z muss als Punkt der Tangente natürlich ebenfalls die Gleichungen (1) befriedigen. Elimination von x, y, z aus (1), (2) und $\varphi = 0$ ergiebt dann die gesuchte Fläche oder Curve im Raume (X, Y, Z), je nachdem eine oder zwei Gleichungen resultieren.

Der letztere Fall tritt ein, wenn die Fläche eine Schar von Complexgeraden als Erzeugende enthält. Es ist dann vorteilhaft, zur Aufsuchung der zugehörigen Curve des Raumes (X, Y, Z) lieber den folgenden Weg einzuschlagen. Die ∞^1 erzeugenden Complexgeraden der Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$ werden dargestellt durch Gleichungen von der Form:

$$(3) \qquad \begin{cases} M + xN + z = 0 \\ xL - N - y = 0\,, \end{cases}$$

wo die M, N, L Funktionen eines Parameters c sind. Um nun die Punkte X, Y, Z zu erhalten, die diesen Complexgeraden entsprechen, hat man nur nötig, (3) mit (1) zu vergleichen. Es folgt

$$X + iY = M(c)\,, \quad Z = N(c)\,, \quad X - iY = L(c)\,,$$

und damit ist die gesuchte Curve gefunden.

Liegt andererseits im Raume (x, y, z) eine Curve vor:

$$(4) \qquad \varphi(x, y, z) = 0\,, \quad \psi(x, y, z) = 0\,,$$

so erhalten wir unmittelbar durch Elimination von x, y, z aus (1) und (4) die zugehörige Fläche des anderen Raumes.

Wir werden nun im I. Abschnitt alle bei projektiven Gruppen invarianten Flächen untersuchen, deren Punkte transitiv transformiert werden, während wir uns im II. Abschnitt mit allen bei projektiven Gruppen invarianten Curven beschäftigen wollen. Im I. Abschnitt haben wir jedoch von vornherein alle abwickelbaren Flächen, deren Erzeugende nicht dem linearen Complex angehören, von der Betrachtung auszuschliessen. Denn da den zugehörigen Brenncurven dieselben Gebilde des Raumes (X, Y, Z) zugeordnet sind wie jenen Flächen selbst, so würden wir bei Mitberücksichtigung derselben zu Resultaten gelangen, denen wir im II. Abschnitt noch einmal begegnen müssten.

Um die Aufsuchung der invarianten linearen Complexe möglichst zu erleichtern, wollen wir noch zum Schluss eine Tabelle aufstellen, die es uns ermöglicht, für jede beliebige projektive infinitesimale Transformation sofort die Variation des allgemeinen linearen Complexes $L \equiv A\varphi + B\psi + C\chi + Ddx + Edy + Gdz = 0$ abzulesen.

Infinitesimale Transformation:	p	q	r	xp
Variation von L:	$-Bdz+Cdy$	$-Cdx+Adz$	$-Ady+Bdx$	$B\psi+C\chi+Ddx$

yq	zr	yp	zp	zq	xq
$C\chi+A\varphi+Edy$	$A\varphi+B\psi+Gdz$	$-B\varphi+Ddy$	$-C\varphi+Ddz$	$-C\psi+Edz$	$-A\psi+Edx$

xr	yr	xU'	yU'	zU'
$-A\chi+Gdx$	$-B\chi+Gdy$	$2xL+G\psi-E\chi$	$2yL+D\chi-G\varphi$	$2zL+E\varphi-D\psi$

I. Abschnitt.

Untersuchung aller Flächen, die projektive Gruppen gestatten, durch welche ihre Punkte transitiv transformiert werden.

Capitel 1.

Betrachtung aller Flächen, die gerade ∞^2 projektive Transformationen gestatten.

Eine Aufzählung aller dieser Flächen findet sich in einer Lieschen Abhandlung im Jahrgang 1895 der Leipziger Berichte, pag. 235, 236, 247. Untersucht man die dort verzeichneten zweigliedrigen Gruppen in der vorhin angegebenen Weise auf das Vorhandensein von invarianten linearen Complexen, so findet man, dass nichtspezielle lineare Complexe nur in den Fällen (I), (V) und (VI) in Ruhe bleiben. Wir beginnen mit

(I) $$a(y - xz + \tfrac{1}{3}z^3)^2 + b(2x - z^2)^3 = 0\,, \quad ab(a - 9b) \neq 0\,;$$

$$(G_1)\ \boxed{r + zp + xq\,, \quad zr + 2xp + 3yq}\,.$$

Als einziger bei der Gruppe G_1 invarianter linearer Complex ergiebt sich, wenn wir die speziellen Complexe ein für allemal stillschweigend ausschliessen:

$$zdx - xdz - dy = 0\,.$$

Durch Vertauschung von x, y, z mit resp. y, $-z$, x nimmt der lineare Complex die Normalform an, während die Gruppe übergeht in

$$\boxed{p + xq - yr\,, \quad xp + 2yq + 3zr}$$

mit den invarianten Flächen

$$F \equiv a(z + xy - \tfrac{1}{3}x^3)^2 + b(2y - x^2)^3 = 0\,.$$

Nach der aufgestellten Übersicht entspricht der obigen Gruppe die conforme Gruppe

$$\boxed{\tfrac{1}{2}(P + iQ) + D_y + iD_x\,, \quad 2U + iD_z}\,.$$

Wir haben jetzt

$$F_x + (X - iY)F_y - Z \cdot F_z = 0$$

zu bilden; wir erhalten

$$\begin{aligned}\Phi \equiv 2a(z + xy - \tfrac{1}{3}x^3)[-Z + x(X - iY) + y - x^2]\\ + 6b(2y - x^2)^2(X - iY - x) = 0\,.\end{aligned}$$

Aus

$$\begin{cases} X + iY + xZ + z = 0 \\ x(X - iY) - Z - y = 0 \end{cases}$$

folgt

$$y = x(X - iY) - Z\,; \quad z = -(X + iY + xZ)\,.$$

Substituieren wir diese Werte in $F = 0$ und $\Phi = 0$, so ergiebt sich

$$a\left[x^2(X - iY) - 2xZ - (X + iY) - \frac{x^3}{3}\right]^2 - b\left[x^2 - 2x(X - iY) + 2Z\right]^3 = 0$$

und (nach Weglassung eines von a und b unabhängigen Faktors)

$$\begin{aligned}a\left[x^2(X - iY) - 2xZ - (X + iY) - \frac{x^3}{3}\right]\\ - 3b\left[x^2 - 2x(X - iY) + 2Z\right]\left[X - iY - x\right] = 0\,.\end{aligned}$$

Aus diesen beiden Gleichungen ist noch x zu eliminieren. Wir setzen zur Abkürzung

$$U \equiv X + iY\,; \quad V \equiv X - iY\,; \quad W \equiv X - iY - x\,.$$

Dann schreiben sich die Gleichungen folgendermassen:

$$a[W^3 + 3W(2Z - V^2) - 3U - 6ZV + 2V^3]^2 = 9b[W^2 + 2Z - V^2]^3$$
$$a[W^3 + 3W(2Z - V^2) - 3U - 6ZV + 2V^3] = 9b[W^2 + 2Z - V^2] \cdot W.$$

Setzen wir nochmals zur Abkürzung:

$$R \equiv 2Z - V^2; \quad S \equiv 3U + 6ZV - 2V^3,$$

so nehmen unsere Gleichungen die Form an:

$$a[W^3 + 3WR - S]^2 = 9b[W^2 + R]^3$$
$$a[W^3 + 3WR - S] \ = 9b[W^2 + R] \cdot W.$$

Es erübrigt nur noch, W zu eliminieren. Wir dividieren beide Seiten der ersten Gleichung durch die quadrierten Seiten der zweiten:

$$\frac{1}{a} = \frac{W^2 + R}{9bW^2}, \quad \text{also} \quad W^2 = \frac{aR}{9b - a}.$$

Erheben wir ferner beide Seiten der zweiten Gleichung in die 3. Potenz und dividieren durch die Seiten der ersten, so bleibt:

$$a^2[W^3 + 3WR - S] = 81b^2W^3$$

oder

$$W[(a^2 - 81b^2)W^2 + 3a^2R] = a^2S.$$

Quadrieren wir schliesslich beide Seiten und substituieren den eben gefundenen Ausdruck für W^2, so finden wir:

$$(2a - 9b)^2R^3 = a(9b - a)S^2.$$

Setzen wir rückwärts die Ausdrücke für R und S wieder ein und schreiben zur Abkürzung

$$(2a - 9b)^2 = M, \quad a(9b - a) = N,$$

so erhalten wir schliesslich als Gleichung der gesuchten Fläche:

$$M[2Z - (X - iY)^2]^3 + N[3(X + iY) + 6Z(X - iY) - 2(X - iY)^3]^2 = 0.$$

Wir gehen nun zur nächsten Fläche über:

(V) $$y - xz + \log z = 0,$$

$$(G_5) \quad \boxed{zq + p, \quad xp + q - zr}.$$

Invariant bleibt der lineare Complex

$$zdx - xdz + dy = 0,$$

der sich durch Vertauschung von x, y, z mit y, z, x auf die Normalform reduciert, während Fläche und Gruppe die folgende Gestalt annehmen:

$$z = xy - \log x,$$

$$\boxed{q + xr, \quad xp - yq - r}.$$

Die früher mit $\Phi = 0$ bezeichnete Gleichung lautet in diesem Falle:

$$Z + x(X - iY) + y - \frac{1}{x} = 0 .$$

Dazu treten wieder die beiden Gleichungen unserer Berührungstransformation, in denen wir uns z bereits durch seinen Wert ersetzt denken:

$$\begin{cases} X + iY + xZ + xy - \log x = 0 \\ x(X - iY) - Z - y = 0 . \end{cases}$$

Die Elimination von x und y aus den drei letzten Gleichungen ergiebt ohne Mühe:

$$2(X + iY) + \log [2(X - iY)] + 1 = 0 .$$

Ersetzen wir zunächst durch eine Streckung $2X$, $2Y$, $2Z$ durch X, Y, Z und dann durch eine Translation X und Y durch $X - \frac{1}{2}$ und $Y + \frac{i}{2}$, so erhält unsere Fläche die Gestalt

$$X + iY + \log (X - iY) = 0 ,$$

während die zweigliedrige Gruppe nach unserer Übersicht und mit Berücksichtigung der letztgenannten Umformungen der folgenden Gruppe im Raume (X, Y, Z) entspricht:

$$\boxed{R, \quad P - iQ + iD_z - U} .$$

Wir kommen nun zum letzten Fall:

$$\text{(VI)} \qquad y - xz + z^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} = 0 ,$$

$$(G_6) \quad \boxed{\begin{matrix} zq + p, \quad xp + (\gamma + 1)yq + \gamma zr \\ \gamma(\gamma + 1)(\gamma - 1) \neq 0 \end{matrix}} .$$

Auch $\gamma = \frac{1}{2}$ ist zunächst auszuschliessen; denn dann ist (VI) eine Cayley'sche Linienfläche, die bekanntlich mehr als ∞^2 projektive Transformationen gestattet. Wir finden denselben invarianten linearen Complex wie im vorigen Falle; führen wir ihn wie dort in die Normalform über, so erhalten wir statt (VI) und (G_6):

$$z = xy - x^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} ,$$

$$\boxed{q + xr, \quad \gamma xp + yq + (\gamma + 1)zr} .$$

Die Gleichung $\Phi = 0$ lautet hier:

$$Z + x(X - iY) + y - \frac{\gamma + 1}{\gamma} x^{\frac{1}{\gamma}}.$$

Dazu treten die Gleichungen

$$\begin{cases} X + iY + xZ + xy - x^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} = 0 \\ x(X - iY) - Z - y = 0. \end{cases}$$

Die Elimination von x und y lässt sich etwa in folgender Weise ausführen. Durch Addition der ersten und dritten Gleichung folgt

$$x = \left[\frac{2\gamma(X - iY)}{\gamma + 1}\right]^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}.$$

Eliminiert man dann aus der zweiten und dritten Gleichung y und substituiert den für x gefundenen Wert, so ergiebt sich

$$\frac{\gamma - 1}{2\gamma} \cdot \left[\frac{2\gamma(X - iY)}{\gamma + 1}\right]^{\frac{1+\gamma}{1-\gamma}} = X + iY.$$

Vertauscht man x, y, z mit resp. λx, λy, λz und wählt λ in passender Weise, so übersieht man, dass unsere Gleichung sich auf die Form bringen lässt:

$$(X - iY)^{\frac{1+\gamma}{1-\gamma}} = X + iY.$$

Durch weitere Umformungen erhalten wir nach einander:

$$(1 + \gamma) \log (X - iY) - (1 - \gamma) \log (X + iY) = 0,$$

$$\gamma \log (X^2 + Y^2) = \log \frac{X + iY}{X - iY} = 2i \operatorname{arc\,tg} \frac{Y}{X} + 2\lambda\pi i,$$

$$X^2 + Y^2 = e^{\frac{2\lambda\pi i}{\gamma}} \cdot e^{\frac{2i}{\gamma} \operatorname{arc\,tg} \frac{Y}{X}}.$$

Ersetzen wir endlich $\frac{i}{\gamma}$ durch β und führen eine passende Streckung aus, so haben wir schliesslich die Gleichung

$$X^2 + Y^2 = e^{2\beta \operatorname{arc\,tg} \frac{Y}{X}}.$$

Diese Flächen stellen Cylinder dar, die senkrecht über logarithmischen Spiralen der XY-Ebene errichtet sind. Jede solche Fläche gestattet also eine zweigliedrige conforme Gruppe, die wir aus der

gegebenen projektiven Gruppe nach unserer vorn aufgestellten Übersicht in der Gestalt erhalten:

$$\boxed{R, \quad \beta U - D_z} .$$

Capitel 2.

Untersuchung der nicht ausgearteten Fläche zweiten Grades.

Jede nicht ausgeartete Fläche zweiten Grades lässt sich bekanntlich durch projektive Transformation auf die Form

$$z - xy = 0$$

bringen. Sie gestattet die sechsgliedrige projektive Gruppe

$$\boxed{p + yr, \quad xp + zr, \quad xU' - zq, \quad q + xr, \quad yq + zr, \quad yU' - zp} .$$

Die Bestimmung aller Untergruppen dieser Gruppe ist bereits geleistet[1]). Untersucht man dieselben der Reihe nach auf etwa vorhandene invariante lineare Complexe, so findet man solche nur in folgenden sieben Fällen, die wir nunmehr der Reihe nach durchnehmen wollen.

$$(1) \qquad \boxed{p + yr, \quad xp + zr, \quad xU' - zq, \quad yq + zr} :$$

Invariant bleibt bei (1) nur der lineare Complex

$$xdy - ydx - dz = 0 ,$$

der durch gegenseitige Vertauschung von x und y die Normalform annimmt, während Fläche und Gruppe übergehen in

$$z - xy = 0 ,$$

$$\boxed{q + xr, \quad yq + zr, \quad yU' - zp, \quad xp + zr} .$$

Die eine Schar von Erzeugenden unserer Fläche zweiten Grades wird dargestellt durch die Gleichungen:

$$y = c , \quad z = cx .$$

1) S. Lie, Theorie der Transformationsgruppen, bearbeitet unter Mitwirkung von F. Engel, III. Abschnitt p. 203.

Daraus folgt:

$$dy = 0\,, \quad dz = c\,dx\,.$$

Es wird also die Gleichung des linearen Complexes:

$$x\,dy - y\,dx + dz = 0$$

von allen Geraden dieser Schar erfüllt, unsere Fläche ist von Complexgeraden erzeugt, und demnach ist ihr im Raume (X, Y, Z) eine Curve zugeordnet. Vergleichen wir die obigen Gleichungen mit den allgemeinen Gleichungen jeder Complexgeraden im Raume (x, y, z):

$$\begin{cases} X + iY + xZ + z = 0 \\ x(X - iY) - Z - y = 0\,, \end{cases}$$

so folgt:

$$X + iY = 0\,, \quad Z = -c\,, \quad X - iY = 0\,,$$

und sohliesslich durch Elimination von c:

$$X = 0\,, \quad Y = 0\,.$$

Die gesuchte Curve ist also die Z-Axe. Die viergliedrige Gruppe liefert ferner im Raume (X, Y, Z) die conforme Gruppe

$$\boxed{R\,, \quad U\,, \quad V_z\,, \quad D_z}\,.$$

Man übersieht leicht, dass die Z-Axe in der That diese Gruppe gestattet.

(2) $$\boxed{p + yr\,, \quad xp + zr\,, \quad xU' - zq}\,:$$

Man findet die folgende Schar von invarianten linearen Complexen:

$$A(y\,dz - z\,dy) + C(x\,dy - y\,dx) + D\,dx - C\,dz = 0\,.$$

Nun überzeugt man sich aber ohne Mühe, dass jeder einzelne unter diesen noch eine vierte infinitesimale Transformation der sechsgliedrigen Gruppe der Fläche gestattet, nämlich

$$D(q + xr) - 2C(yq + zr) + A(yU' - zp)\,.$$

Somit bietet uns also der Fall (2) nichts Neues.

(3) $$\boxed{p + yr\,, \quad xp + zr\,, \quad yq + zr}\,:$$

Als einziger invarianter Complex ergiebt sich

$$xdy - ydx - dz = 0 .$$

Dieser aber gestattet die viergliedrige Gruppe (1).

(4) $\boxed{p + yr, \quad xp + zr}$:

Invariant bleibt

$$A(ydz - zdy) + C(xdy - ydx) + Ddx - Cdz = 0 .$$

Dies ist aber dieselbe Schar, die wir bereits in Fall (2) gefunden hatten.

(5) $\boxed{p + yr, \quad xp + cyq + (c+1)zr, \quad c \neq 0}$:

Der einzige invariant bleibende lineare Complex

$$xdy - ydx - dz = 0$$

gestattet die viergliedrige Gruppe (1).

(6) $\boxed{p + yr, \quad yq + zr}$:

Hier tritt folgende Schar von invarianten linearen Complexen auf:

$$xdy - ydx - dz + mdy = 0 .$$

Wir haben zunächst zu untersuchen, ob dieselbe nicht etwa noch eine dritte infinitesimale Transformation unserer sechsgliedrigen Gruppe gestattet. Variieren wir die Gleichung in Bezug auf die infinitesimale Transformation

$$\lambda(xp + zr) + \mu(xU' - zq) + \nu(q + xr) + \sigma(yU' - zp) ,$$

so erhalten wir, indem wir von den im Anfang eingeführten Abkürzungen Gebrauch machen, als Bedingung der Invarianz:

$$2\sigma\varphi + (\lambda - \mu m)\chi - 2\nu dx - (\lambda + \mu m)dz = \varrho(\chi - dz + mdy) .$$

Den Fall $m = 0$ schliessen wir von vornherein aus; denn dann gestattet der lineare Complex, wie wir bereits wissen, die viergliedrige Gruppe (1). Da nun auf der linken Seite der obigen Gleichung ein Glied mit dy überhaupt nicht vorhanden ist, so folgt $\varrho = 0$, also

$$\sigma = \lambda = \mu = \nu = 0 .$$

Demnach gestatten die linearen Complexe

$$xdy - ydx - dz + mdy \qquad (m \neq 0)$$

nur die zweigliedrige Gruppe (6). Ersetzen wir x durch $x - m$ und vertauschen dann x und y gegenseitig, so reduciert sich die Schar auf die Normalform, während Fläche und Gruppe übergehen in

$$z - x(y - m) = 0\,,$$

$$\boxed{q + xr\,, \quad xp + zr}\,.$$

Wie man sich leicht überzeugt, besteht für $m \neq 0$ weder die eine noch die andere Schar der Erzeugenden aus Complexgeraden. Also entspricht der Fläche auch eine Fläche im Raume (X, Y, Z), die nach unserem allgemeinen Verfahren in sehr einfacher Weise in der Form hervorgeht:

$$X^2 + Y^2 = \left(\frac{m}{2}\right)^2.$$

Somit haben wir eine Schar von Rotationscylindern gefunden, die wir natürlich noch durch eine passende Streckung in jedem einzelnen Falle auf den Typus

$$X^2 + Y^2 = 1$$

reducieren können. Die zweigliedrige Gruppe verwandelt sich nach der allgemeinen Übersicht in

$$\boxed{R\,, \quad D_z}\,,$$

was offenbar vorauszusehen war.

(7) $$\boxed{xp + zr\,, \quad yq + zr}\,:$$

Es ergeben sich die invarianten linearen Complexe

$$xdy - ydx + mdz = 0\,.$$

Durch eine ganz analoge Betrachtung findet man, dass jeder unter diesen mit Ausschluss der Fälle $m = \pm 1$ in der That nur die Untergruppe (7) der sechsgliedrigen Gruppe gestattet. Ersetzen wir nunmehr z durch $\frac{z}{m}$, wobei ja (7) unverändert bleibt, so reduciert sich die ganze Schar auf die Normalform, während $z - xy = 0$ übergeht in die Flächenschar

$$z - mxy = 0\,.$$

Auch hier existiert keine Schar von erzeugenden Complexgeraden; die Ausübung unserer Berührungstransformation ergiebt ohne Schwierigkeit im Raume (X, Y, Z) die Flächen:

$$X^2 + Y^2 + \frac{(m-1)^2}{4m} Z^2 = 0\,,$$

oder

$$X^2 + Y^2 + \lambda Z^2 = 0\,.$$

Die Gruppe (7) geht über in die conforme Gruppe

$$\boxed{D_z\,, \quad U}\,,$$

die augenscheinlich jeden Rotationskegel um die Z-Axe, dessen Spitze im Coordinatenanfange liegt, in sich transformiert.

Capitel 3.

Untersuchung der Cayley'schen Linienfläche

$$z - xy + \frac{x^3}{3} = 0\,.$$

Die Fläche gestattet die dreigliedrige projektive Gruppe

$$\boxed{p + xq + yr\,, \quad xp + 2yq + 3zr\,, \quad q + xr}\,.$$

Einen invarianten linearen Complex besitzt dieselbe nicht. Was nun ihre Untergruppen anlangt, so bemerken wir zunächst, dass sie gleichzusammengesetzt ist mit der Gruppe

$$\boxed{p\,, \quad xp + 2yq\,, \quad q}\,.$$

Diese enthält die invariante Untergruppe

$$p\,, \; q\,.$$

Jede andere zweigliedrige Untergruppe hat die Form:

$$\alpha p + \beta q\,, \quad xp + 2yq + \lambda p + \mu q\,.$$

Durch Translationen längs der x- und y-Axe, die ja der Gruppe angehören, lassen sich λ und μ zum Verschwinden bringen; der Klammerausdruck giebt dann

$$\alpha p + 2\beta q\,.$$

Demnach verschwindet entweder α oder β, und die zweigliedrigen Untergruppen der gegebenen dreigliedrigen Gruppe lassen sich folglich auf nur drei Typen zurückführen:

$$(1) \qquad \boxed{p + xq + yr\,, \quad q + xr}\,,$$

$$(2) \qquad \boxed{p + xq + yr\,, \quad xp + 2yq + 3zr}\,,$$

$$(3) \qquad \boxed{q + xr\,, \quad xp + 2yq + 3zr}\,.$$

Die Gruppe (1) lässt keinen linearen Complex in Ruhe. Im Falle (2) hingegen bleibt

$$x\,dy - y\,dx - dz = 0$$

invariant. Durch gegenseitige Vertauschung von x und y geht die Normalform hervor, während unsere Fläche und die Gruppe (2) die Formen annehmen:

$$z - xy + \frac{y^3}{3} = 0\,; \quad \boxed{q + xr + yp\,, \quad yq + 2xp + 3zr}\,.$$

Die Schar der Erzeugenden wird dargestellt durch die Gleichungen

$$y = c\,, \quad z = xc - \frac{c^3}{3}\,.$$

Sie erfüllen offenbar die Gleichung

$$x\,dy - y\,dx + dz = 0$$

und sind somit sämtlich Complexgeraden. Vergleicht man mit den allgemeinen Gleichungen der Complexgeraden:

$$\begin{cases} X + iY + xZ + z = 0 \\ x(X - iY) - Z - y = 0\,, \end{cases}$$

so findet man:

$$c = -Z\,, \quad \frac{c^3}{3} = X + iY\,, \quad X - iY = 0\,,$$

oder nach Elimination von c:

$$X - iY = 0\,, \quad 6X + Z^3 = 0\,.$$

Diese Curve gestattet also die zweigliedrige conforme Gruppe

$$\boxed{V_x - iV_y + 2R\,, \quad U + 2iD_z}\,.$$

Die Gruppe (3) besitzt ebenfalls einen invarianten linearen Complex, und zwar unmittelbar in der Normalform

$$xdy - ydx + dz = 0.$$

In diesem Falle sind aber die Erzeugenden der Fläche

$$z - xy + \frac{x^3}{3} = 0,$$

wie man leicht nachweist, keine Complexgeraden; wir werden also im Raume (X, Y, Z) gleichfalls eine Fläche erhalten. Die Gruppe (3) ist jedoch bereits dagewesen; sie ist nur ein Specialfall der aus (G_6) im 1. Capitel abgeleiteten Gruppe, wenn wir dort $\gamma = \frac{1}{2}$ setzen. Es liegt also keine Veranlassung vor, den Fall (3) als besonderen Typus zu berücksichtigen. Auch die Gruppe (2) ist bereits aufgetreten; wir fanden sie als (G_1) im 1. Capitel. Während aber dort die Flächen (I) im allgemeinen in Flächen des Raumes (X, Y, Z) übergingen, betrachteten wir im Falle (2) im besonderen eine invariante Fläche, die sich vermöge unserer Berührungstransformation in eine Curve verwandelte.

Capitel 4.

Untersuchung der Abwickelbaren einer Curve 3. Ordnung: $2y - x^2 = 0, \quad 3z + xy = 0.$

Die Curve gestattet die dreigliedrige projektive Gruppe

$$\boxed{p + xq - yr, \quad xp + 2yq + 3zr, \quad 3(zq + xU') - 4yp}\,.$$

Natürlich bleibt mit der Curve auch ihre Abwickelbare in Ruhe. Sie wird von den Tangenten der Curve erzeugt; die Gleichungen dieser Tangentenschar sind die folgenden, in denen x_1 die x-Coordinate des Berührungspunktes bedeutet:

$$y = x_1 x - \frac{x_1^2}{2}, \quad z = -\frac{x_1^2}{2} x + \frac{x_1^3}{3}.$$

Als einziger bei unserer Gruppe unverändert bleibender linearer Complex ergiebt sich

$$xdy - ydx + dz = 0.$$

Jede Gerade der erwähnten Schar befriedigt diese Gleichung; demnach gehören die Erzeugenden der abwickelbaren Fläshe dem

Complex an. Vergleichen wir wieder mit den allgemeinen Gleichungen der Complexgeraden:

$$\begin{cases} X + iY + xZ + z = 0 \\ x(X - iY) - Z - y = 0, \end{cases}$$

so erkennen wir, dass die Punkte des Raumes (X, Y, Z), welche jener Geradenschar zugeordnet sind, den beiden Bedingungen gehorchen:

$$2Z - (X - iY)^2 = 0, \quad 3(X + iY) + (X - iY)^3 = 0.$$

Diese Curve gestattet, wie wir aus der anfangs gegebenen Übersicht ablesen, die folgende conforme Gruppe:

$$\boxed{D_y + iD_x + \tfrac{1}{2}(P + iQ), \quad 2U + iD_z, \quad 3(D_y - iD_x) + 2(V_x - iV_y)}\,.$$

Unter den bei der projektiven Gruppe (G_4) invariant bleibenden Flächen (I) des 1. Capitels hatten wir diejenige ausgeschlossen, die durch die Annahme $a - 9b = 0$ bervorgeht. Dies findet seine Begründung darin, dass in diesem Falle die Fläche zur Abwickelbaren der Curve $2x - z^2 = 0$, $3y - xz = 0$ wird und somit mehr als ∞^2 projektive Transformationen gestattet.

Es wäre noch der Fall denkbar, dass irgend eine zweigliedrige Untergruppe unserer dreigliedrigen Gruppe ausser dem bereits verwerteten linearen Complex noch einen zweiten invariant liesse. Da unsere Gruppe gleichzusammengesetzt ist mit

$$\boxed{p, \quad xp, \quad x^2p}\,,$$

so lassen sich ihre zweigliedrigen Untergruppen alle auf den Typus

$$\boxed{p + xq - yr, \quad xp + 2yq + 3zr}$$

reducieren; dieser aber besitzt nur einen einzigen invarianten Complex.

Wir könnten nun als letzte Fläche noch die Ebene untersuchen. Ihr Brenngebilde besteht in einem Punkte, und diesem ist im Raume (X, Y, Z) eine Minimalgerade zugeordnet. Wählt man etwa im Raume (x, y, z) den Coordinatenanfang als invarianten Punkt, so ist dadurch innerhalb der Gruppe Γ_{10} die siebengliedrige Untergruppe

$$\boxed{xq, \quad yp, \quad xp + zr, \quad yq + zr, \quad zp - yU', \quad zq + xU', \quad zU'}$$

definiert. Dem Punkte entspricht nach den Gleichungen unserer Berührungstransformation die Minimalgerade:

$$X + iY = 0\,, \quad Z = 0\,.$$

Sie gestattet die Gruppe

$$\boxed{P + iQ\,,\ U,\ D_z\,,\ D_y - iD_x,\ V_x,\ V_y,\ V_z}\,.$$

II. Abschnitt.

Untersuchung aller Curven, die projektive Gruppen gestatten.

Capitel 5.

Betrachtung des Kegelschnittes.

Jeder Kegelschnitt, sofern er nicht in ein Geradenpaar ausgeartet ist, lässt sich, wenn wir statt x, y, z die homogenen Coordinaten $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$, $\frac{z}{t}$ einführen, durch projektive Transformation auf die Form bringen

$$z^2 - xy = 0\,, \quad t = 0$$

und gestattet dann die siebengliedrige Gruppe

$$\boxed{p,\ q,\ r,\ U',\ xp - yq,\ 2zp + yr,\ 2zq + xr}\,.$$

Ein Verzeichnis aller Untergruppen derselben findet man in der bereits citierten »Theorie der Transformationsgruppen«, Abschnitt III, pag. 214—215. Untersucht man alle Typen der Reihe nach, so gelangt man dazu, in folgenden fünf Fällen das Vorhandensein von invarianten linearen Complexen zu constatieren.

$$(1) \qquad \boxed{2zp + yr + q\,,\quad 3xp + yq + 2zr\,,\quad p}\ :$$

Invariant bleibt der Complex

$$ydz - zdy - \tfrac{1}{2}dx\,,$$

der durch Vertauschung von y, z, x mit resp. x, y, $-2z$ in die Normalform übergeht, während Gruppe und Curve die Formen annehmen:

$$\boxed{xq - yr + p\,,\quad xp + 2yq + 3zr\,,\quad r}\,,$$

$$y^2 + 2xz = 0\,,\quad t = 0\,.$$

Eliminiert man aus diesen beiden Gleichungen und aus

$$\begin{cases} t(X + iY) + xZ + z = 0 \\ x(X - iY) - tZ - y = 0 \end{cases}$$

die Verhältnisse $x : y : z : t$, so resultiert

$$2Z - (X - iY)^2 = 0\,.$$

Diese Fläche gestattet die conforme Gruppe

$$\boxed{D_y + iD_x + \tfrac{1}{2}(P + iQ)\,,\quad 2U + iD_z\,,\quad P - iQ}\,.$$

Wir wollen die Fälle (2), (3) und (4) gleichzeitig betrachten.

Invariante lineare Complexe:

(2) $\boxed{2zp + yr + q\,,\quad 3xp + yq + 2zr}\,,\quad ydz - zdy - \tfrac{1}{2}dx = 0\,;$

(3) $\boxed{2zp + yr + q\,,\quad p}\,,\quad ydz - zdy - \tfrac{1}{2}dx + \lambda dy = 0\,;$

(4) $\boxed{3xp + yq + 2zr\,,\quad p}\,,\quad ydz - zdy + \mu\, dx = 0\,.$

Auch in den Fällen (3) und (4) lassen sich die auftretenden Scharen von linearen Complexen durch solche lineare Transformationen, welche Gruppe und Curve ungeändert lassen, mit Leichtigkeit in die Form

$$ydz - zdy - \tfrac{1}{2}dx = 0$$

überführen. Dieser Complex gestattet aber, wie wir wissen, die dreigliedrige Gruppe (1).

(5) $\boxed{xp - yq\,,\quad r}$:

Invariante Complexe:

$$xdy - ydx + \lambda dz = 0\,.$$

Wir reducieren auf die Normalform, indem wir etwa x, y, z durch λx, λy, λz ersetzen, wobei sowohl die Gruppe (5) als auch der vorgelegte Kegelschnitt

$$z^2 - xy = 0\,,\quad t = 0$$

die Form bewahrt. Man überzeugt sich leicht, dass in diesem Falle der lineare Complex keine grössere Untergruppe unserer siebengliedrigen Gruppe gestattet. Der bekannte Eliminationsprocess ergiebt im Raume (X, Y, Z) die Fläche

$$X - iY - Z^2 = 0 .$$

(5) geht über in die conforme Gruppe

$$\boxed{U - iD_z, \quad P - iQ} .$$

Capitel 6.

Untersuchung der gewundenen Curve 3. Ordnung:

$$2y - x^2 = 0, \quad 3z + xy = 0 .$$

Ihre dreigliedrige Gruppe haben wir bereits im 4. Capitel aufgestellt. Eliminieren wir aus den Gleichungen der Curve und den beiden Gleichungen unserer Berührungstransformation x, y, z, so erhalten wir die Fläche

$$\tfrac{8}{9}Z^3 + Z(X^2 + Y^2) + \tfrac{1}{4}(X + iY)^2 - \tfrac{1}{3}(X - iY)^2(X^2 + Y^2 + Z^2) = 0,$$

und diese muss die Abwickelbare der in Capitel 4 gefundenen Curve sein. Als conforme Gruppe ergiebt sich natürlich wieder die an jener Stelle bereits ermittelte:

$$\boxed{D_y + iD_x + \tfrac{1}{2}(P + iQ), \; 2U + iD_z, \; 3(D_y - iD_x) + 2(V_x - iV_y)} .$$

Capitel 7.

Betrachtung der ebenen selbstprojektiven Curven.

Typus (I):

$$\frac{y}{z} - \left(\frac{x}{z}\right)^c = 0, \quad t = 0 .$$

Diese Curve gestattet die fünfgliedrige projektive Gruppe

$$\boxed{p, \; q, \; r, \; U', \; xp + cyq} .$$

Die Constante c unterliegt der Beschränkung

$$c(c - 1)(c + 1)(c - 2)(c - \tfrac{1}{2}) \neq 0 ,$$

da die Curve weder in eine Gerade noch in einen Kegelschnitt ausarten darf. Zur Bestimmung der Untergruppen bemerken wir, dass bei mindestens zweigliedrigen Untergruppen — auf die es ja bisher immer nur ankam — die eine infinitesimale Transformation frei von $xp + cyq$ angenommen werden darf; sie wird demnach von der Form sein:

$$\varrho U' + \alpha p + \beta q + \gamma r$$

und lässt sich also für $\varrho \neq 0$ durch Translation in den Typus

$$U'$$

überführen. Dieser aber besitzt keinen invarianten linearen Complex. Also ist $\varrho = 0$, und wir haben erkannt, dass jede Untergruppe unserer fünfgliedrigen Gruppe, wenn sie einen invarianten Complex besitzen soll, eine freie Translation

$$\alpha p + \beta q + \gamma r$$

enthält. Zugleich folgt, dass dreigliedrige Gruppen nicht zu berücksichtigen sind; denn dann treten zwei freie Translationen auf und schliessen somit, wie man leicht constatiert, das Vorhandensein eines invarianten Complexes aus. Wir finden nun durch Klammerausdruck:

$$(\alpha p + \beta q + \gamma r\,,\quad xp + cyq + \varrho U' + \lambda p + \mu q + \nu r)$$
$$= (1 + \varrho)\alpha p + (c + \varrho)\beta q + \varrho\gamma r\,.$$

Wegen der Beschränkungen, denen c unterworfen ist, können niemals zwei der drei Coëfficienten $1 + \varrho$, $c + \varrho$, ϱ übereinstimmen; ebensowenig können alle drei gleichzeitig verschwinden; also hat $\alpha p + \beta q + \gamma r$ einfach die Form p oder q oder r. Da die Variabeln x und y in unserer allgemeinen Gruppe als gleichberechtigt auftreten, so haben wir nur zwei Fälle zu unterscheiden.

$$(1) \qquad r\,,\quad xp + cyq + \varrho U' + \lambda p + \mu q:$$

Der allgemeinste die Translation r gestattende lineare Complex hat die Gleichung

$$\chi + k dx + m dy + n dz\,.$$

Variieren wir nun in Bezug auf die zweite infinitesimale Transformation, so erhalten wir als Bedingung der Invarianz:

$$(1 + c + 2\varrho)\chi + [(\varrho + 1)k - \mu]\,dx + [(c + \varrho)m + \lambda]dy + \varrho n dz$$
$$= M[\chi + k dx + m dy + n dz]\,.$$

Daraus folgt:

$$1 + c + 2\varrho = \varrho\,; \quad \text{also} \quad \varrho = -(1 + c)\,.$$

Substituieren wir diesen Wert in (1), so entsteht die Gruppe

$$r\,, \quad cxp + yq + (1 + c)zr - \lambda p - \mu q\,,$$

die sich durch Translation in die Form

$$\boxed{r\,, \quad cxp + yq + (1 + c)zr}$$

überführen lässt. Invariant bleibt

$$xdy - ydx + mdz = 0\,.$$

Jeder einzelne unter diesen linearen Complexen lässt sich durch jedesmalige Vertauschung von x, y, z mit mx, my, mz, wobei sowohl die Gruppe als auch die Curve dieselbe bleibt, in die Normalform überführen. Fügen wir nun wie früher zu den Gleichungen der Curve noch die Gleichungen unserer Berührungstransformation, so ergiebt die Elimination von $x:y:z:t$ die Fläche

$$X - iY + Z^{1-c} = 0\,,$$

nachdem wir vorher X, Y, Z mit $-X$, $-Y$, $-Z$ vertauscht haben. Die zweigliedrige Gruppe verwandelt sich dabei in die conforme Gruppe

$$\boxed{U + icD_z\,, \quad P - iQ}\,.$$

(2) $$p\,, \quad xp + cyq + \varrho U' + \mu q + \nu r:$$

Durch eine ganz analoge Untersuchung findet man

$$\varrho = 1 - c\,,$$

und (2) erhält dann nach Ausführung einer passenden Translation die Form

$$p\,, \quad (2 - c)xp + yq + (1 - c)zr\,.$$

Invariant bleibt

$$ydz - zdy + mdx = 0\,.$$

Daraus entsteht nach geeigneter Variabelnvertauschung:

$$xdy - ydx + mdz = 0$$

und

$$r\,, \quad xp + (1 - c)yq + (2 - c)zr\,.$$

Ersetzen wir schliesslich noch $1 - c$ durch $\frac{1}{c'}$, wobei c' ganz von selbst denselben Beschränkungen wie c unterworfen bleibt, so erhalten wir genau den Fall (1) wieder.

Typus (II):

$$\frac{x}{z} - \log\left(\frac{y}{z}\right) = 0\,, \quad t = 0\,.$$

Diese Curve wird in sich transformiert durch die fünfgliedrige projektive Gruppe

$$\boxed{p\,, \quad q\,, \quad r\,, \quad U'\,, \quad zp + yq}\,.$$

Zunächst muss aus demselben Grunde wie früher jede zweigliedrige Untergruppe, sofern sie überhaupt einen invarianten linearen Complex besitzen soll, eine freie Translation enthalten. Wir finden durch Klammerausdruck, nachdem wir durch Translation in

$$zp + yq + \varrho U' + \lambda p + \mu q + \nu r$$

λ zum Verschwinden gebracht haben:

$$(\alpha p + \beta q + \gamma r\,, \quad zp + yq + \varrho U' + \mu q + \nu r)$$
$$= (\alpha\varrho + \gamma)p + \beta(1 + \varrho)q + \gamma\varrho r\,,$$

also

$$\gamma p + \beta q = m \cdot (\alpha p + \beta q + \gamma r)\,.$$

Es folgt:

$$\beta = \gamma = 0 \quad \text{oder} \quad \gamma = \alpha = 0\,.$$

(1) $$p\,, \quad zp + yq + \varrho U' + \mu q + \nu r:$$

Als Bedingungen für die Existenz von invarianten linearen Complexen findet man

$$\varrho = -1\,, \quad \mu \neq 0\,.$$

Dann lässt sich die Gruppe auf die Form bringen:

$$p\,, \quad (x - z)p + zr + q\,.$$

Invariant bleibt:

$$ydz - zdy + dx + \lambda dz = 0\,.$$

Durch eine Translation längs der y-Axe, die weder die Gruppe noch die Curve ändert, lässt sich λ gleich Null machen. Vertauschen

wir dann noch x, y, z mit $-z$, y, x, so geht der Complex in die Normalform über, während Gruppe und Curve die Gestalt annehmen:

$$\boxed{(z+x)r+xp+q\,, \quad r}\,,$$

$$\frac{z}{x}+\log\left(\frac{y}{x}\right)=0\,, \quad t=0\,.$$

Sie werden durch unsere Berührungstransformation übergeführt in

$$\boxed{D_z+iR\,, \quad P-iQ} \quad \text{und}$$

$$Z-\log(X-iY)=0\,.$$

(2) $$q\,, \quad zp+yq+\varrho U'+\gamma r:$$

Die Untersuchung auf invariante Complexe ergiebt

$$\varrho=1\,.$$

Dann aber lässt sich γ durch Translation zum Verschwinden bringen. Vertauschen wir noch x, y, z cyklisch, so entsteht die Gruppe:

$$\boxed{r\,, \quad xp+(x+y)q+2zr}$$

mit der invarianten Curve:

$$\frac{y}{x}-\log\left(\frac{z}{x}\right)=0\,, \quad t=0$$

und den invarianten Complexen

$$xdy-ydx+\lambda dz=0\,.$$

λ kann in analoger Weise wie früher gleich Eins gesetzt werden. Die Ausübung unserer Berührungstransformation ergiebt nun, nachdem noch X, Y, Z mit $-X$, $-Y$, $-Z$ vertauscht wurde:

$$\boxed{U+iD_z-\tfrac{1}{2}(P+iQ)\,, \quad P-iQ}\,,$$

$$X-iY+\log Z=0\,.$$

Schliesslich könnte man noch eine beliebige ebene Curve betrachten, die bekanntlich stets eine viergliedrige projektive Gruppe gestattet, die alle Punkte ihrer Ebene einzeln stehen lässt. So ge-

stattet beispielsweise jede Curve, die in der unendlich fernen Ebene gelegen ist, die Gruppe:

$$\boxed{p, \; q, \; r, \; U'} \, .$$

Wir haben aber bereits nachgewiesen, dass sich aus diesen Symbolen keine mindestens zweigliedrige Gruppe bilden lässt, die einen linearen Complex in Ruhe liesse.

Als letzte Curve, die mehr als ∞^1 projektive Transformationen gestattet, bleibt noch die Gerade zu untersuchen. Jeder Geraden des Raumes (x, y, z) entspricht im Raume (X, Y, Z) eine Kugel. Jede Kugel hat vier Bestimmungsstücke; da aber die zehngliedrige Gruppe $\mathfrak{G}_{10}$ Kugel in Kugel überführt, so folgt, dass jede Kugel eine sechsgliedrige conforme Gruppe gestattet. Wählt man etwa die XY-Ebene — denn Kugel und Ebene sind ja innerhalb der $\mathfrak{G}_{10}$ gleichberechtigte Flächen — als Repräsentant aller Kugeln und Ebenen des Raumes (X, Y, Z), so übersieht man leicht, dass diese die folgende Gruppe gestattet:

$$\boxed{P, \; Q, \; U, \; D_z, \; V_x, \; V_y} \, .$$

Capitel 8.

Die Bahncurven der eingliedrigen Gruppen von conformen Punkttransformationen.

Die Bestimmung aller eingliedrigen Untergruppen der allgemeinen projektiven Gruppe des Raumes ist in der bereits erwähnten Abhandlung im Jahrgang 1895 der Leipziger Berichte, pag. 248—260 angedeutet und zum Teil ausgeführt. Setzt man die noch fehlenden einfachen Rechnungen fort, so findet man im Ganzen 13 Typen. Unter diesen befinden sich fünf, die überhaupt keinen linearen Complex in Ruhe lassen. Die übrigen acht wollen wir der Reihe nach durchnehmen.

1) $\alpha x p + \beta y q + \gamma z r, \quad (\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)\alpha\beta\gamma \neq 0.$

Als Bedingung für das Vorhandensein von invarianten Complexen ergiebt sich, dass einer der drei Coëfficienten α, β, γ gleich der

Summe der beiden anderen sein muss. Wählen wir etwa $\gamma = \alpha + \beta$, so haben wir die Gruppe

$$\boxed{xp + \beta yq + (1+\beta)zr} \qquad \beta(\beta - 1) \neq 0$$

mit der invarianten Gleichung

$$xdy - ydx + \lambda dz = 0\,.$$

Alle diese Complexe sind mit der Normalform gleichberechtigt; denn wir haben nur in jedem Falle λz als neues z einzuführen, wobei die Gruppe unverändert bleibt. Dieser entspricht im Raume $(X,\ Y,\ Z)$ eine Gruppe von der Form:

$$\boxed{\beta U + iD_z}\,.$$

Zur Bestimmung der Bahncurven hat man das simultane System

$$\frac{dX}{\beta X + iY} = \frac{dY}{\beta Y - iX} = \frac{dZ}{\beta Z}$$

zu integrieren. Wir haben zunächst eine homogene Differentialgleichung zwischen X und Y allein, deren Integral wir nach bekannten Regeln bestimmen; wir erhalten

$$e^{2i\beta \operatorname{arc\,tg} \frac{Y}{X}} : (X^2 + Y^2) = C_1\,.$$

Erweitern wir ferner in dem obigen System den ersten Bruch mit X, den zweiten mit Y und addieren dann Zähler zu Zähler und Nenner zu Nenner, so ergiebt sich

$$\frac{XdX + YdY}{X^2 + Y^2} = \frac{dZ}{Z}\,,$$

und integriert:

$$\frac{X^2 + Y^2}{Z^2} = C_2\,.$$

Alle Bahncurven der Gruppe $\beta U + iD_z$ werden also dargestellt durch das Gleichungssystem:

$$\begin{cases} e^{2i\beta \operatorname{arctg} \frac{Y}{X}} : Z^2 = C_1 \\ X^2 + Y^2 : Z^2 = C_2\,. \end{cases}$$

Sie sind reell, so oft β rein imaginär ist. Natürlich gestatten auch alle Flächen, die von diesen Curven erzeugt werden, die Gruppe.

Es bleibt noch die Frage zu entscheiden, welche Werte der in dieser Gruppe auftretenden willkürlichen Constanten mit einander gleichberechtigt sind. Jede infinitesimale Transformation

$$xp + \beta yq + (1 + \beta)zr$$

lässt das von den drei Coordinatenebenen und der unendlich fernen Ebene gebildete Tetraëder invariant. Eine Transformation des linearen Complexes also, welche diesen Typus in einen anderen überführt, der sich von jenem nur durch die veränderte Constante unterscheidet, muss die vier Ebenen irgendwie unter einander vertauschen. Führt man alle diese Transformationen aus, so findet man ohne Mühe, dass die willkürliche Constante β nur die folgenden Werte annehmen kann:

$$\beta, \quad -\beta, \quad \frac{1}{\beta}, \quad -\frac{1}{\beta}.$$

Soll demnach unsere eingliedrige Gruppe für jeden Wert von β wirklich einen neuen Typus repräsentieren, so ergiebt sich insbesondere für reelle Werte von β die Bedingung

$$\beta > 1.$$

(2) $$xp + \beta yq + 2r, \quad \beta(\beta - 1) \neq 0.$$

Man findet wieder $\beta = -1$ sowie dieselbe Schar von invarianten Complexen wie bei (1), die sich auch hier in einfacher Weise auf die Normalform reducieren lässt. Der Gruppe

$$\boxed{xp - yq + 2r}$$

entspricht im Raume (X, Y, Z) der Typus

$$\boxed{U - iD_z + P - iQ}.$$

Wir haben das simultane System:

$$\frac{dX}{X - iY + 1} = \frac{dY}{Y + iX - i} = \frac{dZ}{Z}.$$

Zunächst ergiebt sich ein von Z freies Integral:

$$X + iY - \log(X - iY) = C_1.$$

Ferner ist

$$\frac{dX - idY}{2(X - iY)} = \frac{dZ}{Z},$$

also

$$\frac{X - iY}{Z^2} = C_2 .$$

(3) $$\alpha x p + \beta y q , \quad \alpha\beta(\alpha - \beta) \neq 0 :$$

Man findet wie früher: $\alpha + \beta = 0$. Auch für die invarianten Complexe gilt das früher Gesagte. Die Gruppe

$$\boxed{xp - yq}$$

geht über in

$$\boxed{U - iD_z} .$$

Als Bahncurven ergeben sich:

$$X + iY = C_1 , \quad \frac{X - iY}{Z^2} = C_2 .$$

(4) $$(x - z)p + q + zr :$$

Invariant bleibt

$$z dy - y dz - dx + \lambda dz = 0 .$$

Durch eine Translation längs der y-Axe, die ja an der Gruppe nichts ändert, lässt sich λ zum Verschwinden bringen. Vertauschung von x, z mit z, $-x$ bringt die Normalform hervor und giebt der Gruppe die Form

$$\boxed{(z + x)r + q + xp} ,$$

die vermöge der Berührungstransformation übergeht in

$$iD_z - R ,$$

wofür wir nach Ausführung einer passenden Streckung auch schreiben können:

$$\boxed{D_z + R} .$$

Als Bahncurven findet man ohne Schwierigkeit:

$$X^2 + Y^2 = C_1 , \quad Z - \operatorname{arctg} \frac{Y}{X} = C_2 .$$

(5) $$zp + xq + r :$$

Invariant bleibt

$$z dx - x dz - dy + \lambda dz = 0 .$$

Die Einführung der neuen Variabeln

$$x_1 = x - \frac{\lambda}{2}, \quad y_1 = y - \frac{\lambda}{2} z, \quad z_1 = z$$

lässt (5) ungeändert, während die Schar der linearen Complexe sich auf

$$z_1 dx_1 - x_1 dz_1 - dy_1 = 0$$

reduciert. Durch geeignete Vertauschung der Variabeln führen wir den Complex auf die Normalform zurück und erhalten dabei die Gruppe

$$\boxed{xq - yr + p}$$

und im Raume (X, Y, Z) nach einer passenden Streckung:

$$\boxed{D_y + iD_x + P + iQ} \; .$$

Das simultane System lautet:

$$\frac{dX}{1-Z} = \frac{dY}{i(1+Z)} = \frac{dZ}{X - iY} .$$

Daraus folgt:

$$\frac{dX - idY}{2} = \frac{dZ}{X - iY},$$

$$4Z - (X - iY)^2 = C_1 .$$

Anderseits lässt sich auch die Gleichung ableiten:

$$\frac{dX + idY}{-2Z} = \frac{dZ}{X - iY},$$

oder, wenn wir vermöge des gefundenen Integrals Z eliminieren:

$$-\frac{4d(X+iY)}{C_1 + (X - iY)^2} = d(X - iY),$$

$$4(X + iY) + C_1(X - iY) + \frac{(X - iY)^3}{3} = C_2,$$

$$2(X + iY) + 2Z(X - iY) - \frac{(X - iY)^3}{3} = C_2 .$$

(6) $$\boxed{xp + zr} \; :$$

Der allgemeinste bei dieser Gruppe invariante lineare Complex hat die Gleichung

$$A\varphi + C\chi + Ddx + Gdz = 0\,.$$

Sie unterscheidet sich also von der im Anfang aufgestellten allgemeinen Complexgleichung nur dadurch, dass hier

$$B = E = 0$$

ist. Wir können die Gleichung auch in der Form schreiben:

$$(Cx - Az)dy - yd(Cx - Az) + d(Dx + Gz) = 0\,.$$

Wir substituieren:

$$y_1 = y\,, \quad x_1 = Cx - Az\,, \quad z_1 = Dx + Gz\,.$$

Die Determinante

$$\begin{vmatrix} C & -A \\ D & G \end{vmatrix} \equiv AD + CG$$

kann nicht verschwinden; denn sonst wäre

$$AC + BE + CG = 0$$

und somit der lineare Complex ein spezieller. Wir erhalten durch Ausführung der Substitution:

$$x_1 dy_1 - y_1 dx_1 + dz_1 = 0\,,$$

während die Gruppe (6) völlig ungeändert bleibt. Ihr entspricht im Raume (X, Y, Z) die Rotation um die Z-Axe

$$\boxed{D_z}$$

mit den Bahncurven

$$X^2 + Y^2 = C_1\,, \quad Z = C_2\,.$$

Es ist bemerkenswert, dass innerhalb der conformen Gruppe $\mathfrak{G}_{10}$ Rotation und Streckung gleichberechtigt sind. Vertauschen wir nämlich in der Gruppe (6) x, y, z mit y, x, $-z$, wobei ja

$$xdy - ydx + dz = 0$$

sich nicht ändert, so erhalten wir einen mit (6) innerhalb der Gruppe Γ_{10} des linearen Complexes gleichberechtigten Typus

$$\boxed{yq + zr}\,,$$

dem im Raume (X, Y, Z) die Streckung

$$\boxed{U}$$

mit den Bahncurven

$$\frac{Y}{X} = C_1, \quad \frac{Z}{X} = C_2$$

zugeordnet ist.

(7) $$zq + p:$$

Allgemeinster invarianter linearer Complex:

$$A\varphi + B\psi + Ddx + Bdy + Gdz = 0$$

oder

$$(Ay - Bx + G)dz - \left(z - \frac{B}{A}\right)(Ady - Bdx) + \left(D + \frac{B^2}{A}\right)dx,$$

wobei wir zunächst $A \neq 0$ voraussetzen. Durch die Substitution

$$y_1 = Ay - Bx + G, \quad z_1 = \frac{Az - B}{\sqrt{AD + B^2}}, \quad x_1 = \sqrt{AD + B^2}\,x$$

erhalten wir schliesslich, wenn wir noch bedenken, dass $AD + B^2$ nur für spezielle Complexe verschwindet:

$$y_1 dz_1 - z_1 dy_1 + dx_1 = 0,$$

während (7) ungeändert bleibt. Vertauschen wir nun zur Erreichung der Normalform y, z, x mit x, y, z, so bekommen wir statt (7):

$$\boxed{yp + r}\ .$$

Ist $A = 0$, so bleibt

$$zdx - xdz + dy + mdx + ndz = 0$$

übrig.

Durch die Substitution:

$$x_1 = x - n, \quad y_1 = y + \frac{m}{2}x, \quad z_1 = z + \frac{m}{2},$$

welche die Gruppe ungeändert lässt, entsteht

$$z_1 dx_1 - x_1 dz_1 + dy_1 = 0$$

und nach cyklischer Vertauschung:

$$xdy - ydx + dz = 0,$$

$$\boxed{q + xr}\ .$$

Es wäre nun denkbar, dass $yp + r$ und $q + xr$ in einander überführbar sind vermöge einer Transformation der Γ_{10}. In der That gelingt es, indem man

$$x_1 = \frac{y-1}{y+1}, \quad y_1 = \frac{x+z}{y+1}, \quad z_1 = \frac{x-z}{y+1}$$

ansetzt, die Überführung von $yp + r$ in $q_1 + x_1 r_1$ zu bewerkstelligen. Wir haben also nur den letzteren Typus zu berücksichtigen; ihm entspricht die conforme Gruppe

$$\boxed{R}$$

mit den Bahncurven

$$X = C_1, \quad Y = C_2.$$

(8) $$\boxed{r}:$$

Allgemeinster invarianter Complex:

$$xdy - ydx + \lambda dx + \mu dy + \nu dz = 0,$$

der sich mit Leichtigkeit auf die Normalform reducieren lässt, ohne dass r sich ändert. Im Raume (X, Y, Z) lautet die entsprechende Gruppe:

$$\boxed{P - iQ}$$

mit den Bahncurven:

$$X - iY = C_1, \quad Z = C_2.$$

III. Abschnitt.

Untersuchungen über die Reellität der Untergruppen der conformen Gruppe $\mathfrak{G}_{10}$.

Von Interesse ist die Frage, ob die gefundenen Gruppen mit ihren Flächen und Curven auf reelle Formen zu bringen sind. Da jeder der aufgestellten Typen der Repräsentant aller derjenigen Formen ist, die aus ihm durch conforme Transformation hervorgehen, so ist es klar, dass jeder Typus eben nur durch eine conforme Transformation verändert werden darf; nur vermöge einer solchen Transformation darf man versuchen, ihn reell zu machen.

Wir wollen übrigens der Vollständigkeit halber überhaupt alle Untergruppen der conformen Gruppe $\mathfrak{G}_{10}$ in den Bereich unserer Betrachtungen ziehen. Ihre Bestimmung würde, falls wir unsere bisherige Methode beibehalten wollten, zunächst die Aufsuchung aller projektiven Gruppen des Raumes erfordern; und dies würde — abgesehen von den ziemlich viel Geduld und Zeit erfordernden Rechnungen — den Rahmen dieser Abhandlung überschreiten. Wir ziehen es daher vor, eine Arbeit von Knothe zu benutzen, in der alle Untergruppen der Gruppe Γ_{10} bestimmt sind[1]). Wir haben nur nötig, die dort aufgestellten Typen vermöge unserer Berührungstransformation in den Raum (X, Y, Z) zu übertragen, um damit alle Untergruppen der $\mathfrak{G}_{10}$ gefunden zu haben. Eine übersichtliche Zusammenstellung derselben findet man am Schluss der vorliegenden Arbeit. Alle Gruppen, die hier ausser den von uns bereits gefundenen auftreten, können natürlich — wie man sich in jedem einzelnen Falle leicht überzeugt — nur solche sein, die entweder gar keine invarianten Gebilde oder aber nur solche besitzen, die ihrerseits eine grössere Gruppe gestatten.

Capitel 9.

Die reellen Untergruppen der Gruppe aller Ähnlichkeitstransformationen.

Wir bestimmen zuvörderst alle reellen eingliedrigen Gruppen der siebengliedrigen Gruppe aller Ähnlichkeitstransformationen:

$$\boxed{P, \quad Q, \quad R, \quad U, \quad D_x, \quad D_y, \quad D_z} \,.$$

Bekanntlich lässt sich jede reelle infinitesimale Bewegung durch eine reelle Bewegung auf eine der drei Formen bringen:

$$D_z + \gamma R \; (\gamma \neq 0), \quad D_z, \quad R.$$

Der erste Typus stellt eine Schraubenbewegung dar, die im zweiten und dritten Falle zur Rotation resp. Translation ausartet. Die noch fehlenden Typen der Ähnlichkeitsgruppe werden nunmehr die Form besitzen:

$$U + \lambda D_x + \mu D_y + \nu D_z + \alpha P + \beta Q + \gamma R.$$

1) Knothe, Bestimmung aller Untergruppen der projektiven Gruppe des linearen Complexes, Diss.

Die Rotation

$$\lambda D_x + \mu D_y + \nu D_z$$

lässt sich durch eine reelle Drehung um den Coordinatenanfang — wobei U ungeändert bleibt — in die Rotation um die Z-Axe überführen; dann nimmt also die eingliedrige Gruppe die Form an:

$$U + cD_z + \alpha P + \beta Q + \gamma R.$$

Man überzeugt sich leicht, dass es jederzeit möglich ist, durch eine passende reelle Translation α, β, γ zum Verschwinden zu bringen. Wir bekommen also die beiden Typen:

$$U + cD_z \ (c \neq 0), \quad U.$$

Durch eine reelle Streckung lässt sich in $D_z + \gamma R$ γ gleich Eins machen, während in $U + cD_z$ c eine wesentliche Constante bedeutet. Es fragt sich nur, ob nicht etwa durch einen speziellen Wert derselben ein ausgezeichneter Fall entsteht.

Um dies festzustellen, suchen wir die invarianten Punkte auf. Die Gruppe lautet in homogenen Coordinaten:

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 - 3x_4 p_4 + 4c(x_2 p_1 - x_1 p_2).$$

Liegt eine beliebige lineare Gruppe in homogenen Coordinaten vor:

$$\xi_1 p_1 + \xi_2 p_2 + \xi_3 p_3 + \xi_4 p_4,$$

so sind bekanntlich die Coordinaten der invarianten Punkte bestimmt durch die Gleichungen:

$$\xi_1 = \varrho x_1, \quad \xi_2 = \varrho x_2, \quad \xi_3 = \varrho x_3, \quad \xi_4 = \varrho x_4.$$

Diese vier Gleichungen sind linear und homogen in x_1, x_2, x_3, x_4. Die Forderung, dass die Determinante verschwinden muss, giebt uns für ϱ eine Gleichung 4. Grades, und jede Wurzel derselben bestimmt, sobald sie in die obigen Gleichungen substituiert wird, einen invarianten Punkt. Einer Doppelwurzel entspricht ein doppelt zählender invarianter Punkt oder — falls für diese Wurzel alle dreireihigen Unterdeterminanten verschwinden — eine ganze Schar von invarianten Punkten, die continuierlich eine Gerade erfüllen, u. s. w. In unserem Falle lautet die bewusste Determinante:

$$\begin{vmatrix} 1-\varrho & 4c & 0 & 0 \\ -4c & 1-\varrho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\varrho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(3+\varrho) \end{vmatrix} \equiv -(1-\varrho)(3+\varrho)[(1-\varrho)^2 + 16c^2] = 0.$$

Also hat man für ϱ die Werte

$$1\,, \quad -3\,, \quad 1 \pm 4ic\,,$$

die im allgemeinen verschieden sind. Eine Ausnahme kann wegen $c \neq 0$ offenbar nur für imaginäre c eintreten. Dieser Fall kommt aber für uns nicht in Betracht, da wir nur auf die Bestimmung aller reellen Typen ausgehen.

Wir hatten früher gefunden, dass U und D_z vermöge einer conformen Transformation mit einander gleichberechtigt sind. Man erkennt jedoch leicht, dass diese Transformation nicht reell sein kann. Unter den bei D_z invariant bleibenden Punkten befinden sich nämlich ∞^1 reelle — die Punkte der Z-Axe —, während U an reellen Punkten nur den Coordinatenanfang und den unendlich fernen reellen Punkt in Ruhe lässt. Eine Transformation, die D_z in U überführt, muss demnach reelle Punkte in imaginäre verwandeln, also selbst imaginär sein.

Somit sind wir zu folgendem Resultate gelangt:

Alle reellen infinitesimalen Transformationen der Gruppe aller conformen Punkttransformationen lassen sich, soweit sie linear sind, d. h. soweit sie der Gruppe aller Ähnlichkeitstransformationen angehören, auf nicht mehr als fünf Typen reducieren:

$$\boxed{R}\,, \quad \boxed{D_z}\,, \quad \boxed{U}\,, \quad \boxed{D_z + R}\,, \quad \boxed{\underset{c \neq 0}{U + cD_z}}\,.$$

Dass diese Formen auch anderseits innerhalb der Gruppe $\mathfrak{G}_{10}$ von einander verschieden sind, beweist der Umstand, dass wir sie früher bei der Aufstellung aller eingliedrigen conformen Gruppen in der That vollzählig gefunden haben.

Wir bestimmen jetzt alle reellen zweigliedrigen Typen der Ähnlichkeitsgruppe. $X_1 f$ lässt sich, wie wir bereits wissen, durch eine reelle Bewegung in die Form

$$\varrho U + \sigma D_z + \tau R$$

überführen. Da weder U noch D_z durch Klammerausdruck reproduciert wird, so folgt aus der Annahme $(X_1 X_2) = X_1 f$ ohne weiteres:

$$X_1 f \equiv R\,, \quad X_2 f \equiv U + \lambda D_z + \alpha P + \beta Q\,.$$

Nach Ausübung einer passenden Translation ergeben sich die Typen

$$\boxed{R, \quad D_z + \lambda' U} \quad \text{und} \quad \boxed{R, \quad U} \,.$$

Ist $(X_1 X_2) = 0$, so können wir $X_1 f$ frei von U annehmen und also in die Form $\sigma D_z + \tau R$ überführen. Bildet man

$$(\sigma D_z + \tau R, \quad \varrho U + \lambda D_x + \mu D_y + \nu D_z + \alpha P + \beta Q + \gamma R) = 0,$$

so findet man ohne Mühe die Typen

$$\boxed{P, \quad Q} \,, \quad \boxed{R, \quad D_z} \,, \quad \boxed{U, \quad D_z} \,.$$

Alle diese fünf Gruppen treten in der Schlusstabelle I vollzählig auf und sind demnach von einander wesentlich verschieden.

Bei der Bestimmung aller reellen dreigliedrigen Untergruppen der Gruppe aller Ähnlichkeitstransformationen unterscheiden wir zwei Fälle. Wir nehmen zunächst an, dass die Gruppe keine infinitesimale Transformation enthält, die ganz frei von den Symbolen D_x, D_y, D_z ist. Dann lässt sich die Gruppe in der Form schreiben:

$$X_1 f \equiv D_x + \cdots, \quad X_2 f \equiv D_y + \cdots, \quad X_3 f \equiv D_z + \cdots.$$

Bringt man in $X_1 f$ die Coëfficienten von Q und R, in $X_2 f$ den von R durch Translation zum Verschwinden, so überzeugt man sich durch Bildung der Klammerausdrücke, dass die Gruppe nur die Form

$$\boxed{D_x, \quad D_y, \quad D_z}$$

haben kann.

Ist zweitens $X_3 f$ ganz frei von einem Gliede $\alpha D_x + \beta D_y + \gamma D_z$, so können wir jederzeit durch eine Drehung erreichen, dass $X_1 f$ und $X_2 f$ in der Gestalt

$$\lambda D_x + \cdots, \quad \mu D_y + \cdots$$

vorliegen. Der Klammerausdruck lehrt: $\lambda \mu = 0$. Demnach dürfen wir von vornherein zwei infinitesimale Transformationen als frei von den D_x, D_y, D_z voraussetzen. Bedenkt man noch, dass diese beiden eine Gruppe für sich bilden, so gelangt man ohne Mühe zu den folgenden Typen:

$$\boxed{P, Q, R} \,, \quad \boxed{P, Q, \alpha U + \gamma D_z} \,, \quad \boxed{P, Q, D_z + R} \,, \quad \boxed{R, U, D_z} \,.$$

wo den Constanten α und γ auch der Wert Null freisteht.

Wir wenden uns zur Bestimmung aller viergliedrigen Untergruppen unserer siebengliedrigen Gruppe. Kommt U gar nicht vor, so tritt mindestens eine freie Translation auf. Der Klammerausdruck

$$(R\,,\ \alpha D_x + \beta D_y + \gamma D_z + \cdots) = \alpha Q - \beta P$$

lehrt, dass mindestens zwei freie Translationen vorhanden sind. Nimmt man diese in der Form P, Q an, so findet man durch weitere Combinationen ohne Mühe den Typus

$$P,\ Q,\ R,\ \alpha D_x + \beta D_y + \gamma D_z\,,$$

der sich durch Rotation auf die Form

$$\boxed{P,\ \ Q,\ \ R,\ \ D_z}$$

reducieren lässt.

Tritt anderseits U in der Gruppe auf, so können wir doch immer drei infinitesimale Transformationen frei davon wählen; diese müssen, da U niemals durch Klammerausdruck produciert wird, eine Gruppe für sich bilden. Combiniert man nun die in der Tabelle verzeichneten dreigliedrigen linearen Gruppen — soweit sie frei von U sind — mit $U + \cdots$, so gelangt man ohne Schwierigkeit zu den Typen

$$\boxed{D_x,\ D_y,\ D_z,\ U}\ ,\quad \boxed{P,\ Q,\ D_z,\ U}\ ,\quad \boxed{P,\ Q,\ R,\ \alpha D_z + \gamma U}\ ,$$

von denen übrigens der letzte den vorhin gefundenen als Spezialfall in sich begreift.

Was die mehr als viergliedrigen reellen Untergruppen der Ähnlichkeitsgruppe anbetrifft, so erkennt man leicht, dass dieselben in der Tabelle bereits vollzählig auftreten.

Wir haben nunmehr überhaupt festgestellt, dass unsere Tabelle sämtliche reellen Untergruppen der allgemeinen Gruppe aller Ähnlichkeitstransformationeu enthält. Jeder andere conforme Typus kann also — falls er überhaupt reell zu machen ist — jedenfalls in dieser seiner reellen Form nicht linear sein, sondern muss die Symbole V_x, V_y, V_z in irgend welchen Verbindungen aufweisen.

Capitel 10.

Bestimmung aller reellen conformen Gruppen, die sich nicht durch reelle Transformation auf reelle lineare Form bringen lassen.

Die allgemeine conforme Gruppe ist gleichzusammengesetzt mit der zehngliedrigen projektiven Gruppe, die im vierdimensionalen Raume eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit 2. Grades

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_4 x_5$$

invariant lässt; und zwar findet die Zuordnung in folgender Weise statt:

$$\frac{x_1}{x_4} \equiv X, \quad \frac{x_2}{x_4} \equiv Y, \quad \frac{x_3}{x_4} \equiv Z, \quad \frac{x_5}{x_4} \equiv X^2 + Y^2 + Z^2.$$

$$\begin{array}{lll} x_3 p_2 - x_2 p_3 \equiv D_x, & x_4 p_1 + 2x_1 p_5 \equiv P, & x_5 p_1 + 2x_1 p_4 \equiv - V_x, \\ x_1 p_3 - x_3 p_1 \equiv D_y, & x_4 p_2 + 2x_2 p_5 \equiv Q, & x_5 p_2 + 2x_2 p_4 \equiv - V_y, \\ x_2 p_1 - x_1 p_2 \equiv D_z, & x_4 p_3 + 2x_3 p_5 \equiv R, & x_5 p_3 + 2x_3 p_4 \equiv - V_z, \end{array}$$

$$x_4 p_4 - x_5 p_5 \equiv - U.$$

Es ist oft von Vorteil, statt der conformen Gruppe diese projektive Gruppe zu benutzen, da sie uns gestattet, auch das Unendlichferne in den Bereich unserer Betrachtung zu ziehen.

Wie man in der bereits citierten Abhandlung von Knothe pag. 8—9 findet, lassen alle Untergruppen der conformen Gruppe mit Ausnahme dieser selbst stets einen Punkt oder eine Minimalgerade oder eine Kugel oder schliesslich eine gewundene Minimalcurve in Ruhe.

Den unendlich fernen Punkten X, Y, Z sind im vierdimensionalen Raume die Punkte

$$x_4 = 0, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

zugeordnet; unter ihnen befindet sich nur ein einziger reeller, nämlich der Punkt

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0.$$

Dieser bleibt invariant bei allen den infinitesimalen Transformationen der zehngliedrigen projektiven Gruppe, denen im Raume (X, Y, Z) infinitesimale Ähnlichkeitstransformationen entsprechen. Wir sehen also, dass unter allen conformen Transformationen die linearen die einzigen sind, welche im Unendlichfernen einen reellen invarianten Punkt besitzen.

Aber auch die Gruppen, die einen endlichen reellen Punkt invariant lassen, sind hier auszuschliessen; denn eine reelle Translation würde ja diesen Punkt in den Coordinatenanfang verlegen und die Ausführung der Inversion letzteren in den unendlich fernen reellen Punkt überführen.

Wir beschäftigen uns demgemäss zuerst mit der Bestimmung aller reellen conformen Gruppen, die einen imaginären Punkt, nicht aber zugleich einen reellen Punkt in Ruhe lassen. Die Coordinaten des invarianten Punktes seien etwa:

$$X = A + iA', \quad Y = B + iB', \quad Z = C + iC'.$$

Eine reelle Translation bringt zunächst A, B, C zum Verschwinden; eine passende reelle Drehung führt dann den Punkt in einen Punkt der Z-Axe und eine reelle Streckung schliesslich in den Punkt

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = i$$

über. Alle endlichen imaginären Punkte werden also sicher durch die reellen Transformationen der conformen Gruppe transitiv transformiert.

Anderseits lässt sich nachweisen, dass jeder unendlichferne Punkt in einen endlichen übergeführt werden kann. Die endlichen Gleichungen von $x_5 p_1 + 2 x_1 p_4$, nämlich

$$x_1' = x_1 + t x_5, \quad x_2' = x_2, \quad x_3' = x_3, \quad x_4' = x_4 + 2 t x_1 + t^2 x_5, \quad x_5' = x_5$$

verwandeln in der That jeden Punkt, für den $x_4 = 0$ ist, dem also im Raume (X, Y, Z) ein unendlich ferner Punkt entspricht, in einen endlichen Punkt, mit alleiniger Ausnahme des Punktes

$$0 = x_4 = x_1 = x_5.$$

In analoger Weise erhalten wir als einzigen unendlich fernen Punkt, der nicht vermöge der endlichen Gleichungen von $x_5 p_2 + 2 x_2 p_4$ resp. $x_5 p_3 + 2 x_3 p_4$ endlich wird, den folgenden:

$$0 = x_4 = x_2 = x_5$$

$$\text{resp.} \quad 0 = x_4 = x_3 = x_5.$$

Ein unendlich ferner Punkt, der durch keine der drei Transformationen ins Endliche verlegt werden kann, existiert demnach nicht. Also werden alle imaginären Punkte des Raumes (X, Y, Z) — oder was dasselbe ist — alle imaginären Punkte der Mannig-

faltigkeit 2. Grades im Raume $(x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5)$ durch reelle Transformationen der Gruppe transitiv transformiert.

Wählt man etwa

$$x_1 + ix_2 = 0\,,\quad x_3 = x_4 = x_5 = 0$$

als invarianten Punkt, so findet man leicht die zugehörige siebengliedrige Gruppe; ihr entspricht im Raume (X, Y, Z) die conforme Gruppe

$$R,\quad P + iQ,\quad D_z,\quad D_x + iD_y,\quad U,\quad V_z,\quad V_x + iV_y.$$

Diese besitzt augenscheinlich nur die folgende grösste reelle Untergruppe:

(a) $$\boxed{R,\quad U,\quad V_z,\quad D_z}\,.$$

D_z ist mit allen infinitesimalen Transformationen der Gruppe vertauschbar; da ausserdem D_z niemals durch Klammerausdruck produciert wird, so folgt, dass jede Untergruppe, wenn sie um die mit D_z behafteten Glieder gekürzt wird, abermals eine Gruppe erzeugen muss. Wir haben also nur die Untergruppen von R, U, V_z zu bestimmen und dann in passender Weise D_z additiv hinzuzufügen.

R, U, V_z ist gleichzusammengesetzt mit der bekannten dreigliedrigen Gruppe p, xp, x^2p, welche die Punkte einer Geraden transitiv transformiert. Jede zweigliedrige Untergruppe dieser letzteren lässt auf dieser Geraden nur einen Punkt stehen; ist die zweigliedrige Gruppe reell, so muss notwendig auch jener Punkt reell sein, da mit einem imaginären Punkte zugleich auch der conjugierte Punkt in Ruhe bleiben würde. Verlegt man nun den reellen invarianten Punkt ins Unendlichferne, so entsteht die Gruppe

$$p,\ xp$$

und als zugeordnete Gruppe

$$R,\ U.$$

Letztere bleibt auch nach Hinzufügung von D_z linear und liefert uns somit nichts Neues.

Jede eingliedrige Untergruppe von p, xp, x^2p lässt zwei Punkte auf der Geraden stehen. Sind diese reell, so geht die Untergruppe, je nachdem sie zusammenfallen oder verschieden sind, durch reelle Transformation über in

$$p \quad \text{oder} \quad xp\,.$$

Sind anderseits die invarianten Punkte nicht reell, so können sie doch stets durch eine reelle Transformation der Gruppe in das Punktepaar

$$x = \pm i$$

verwandelt werden, d. h. wir erhalten die eingliedrige Gruppe

$$p + x^2 p \, .$$

Von den drei aufgestellten Typen kommt nur dieser letzte für uns in Betracht, da nur diesem eine quadratische conforme Transformation, nämlich

$$V_z + R$$

entspricht. Mit Hinzufügung von D_z erhalten wir die Typen

(b) $\boxed{R + V_z + \lambda D_z}$, (c) $\boxed{R + V_z \, , \quad D_z}$.

Dazu tritt noch die dreigliedrige Gruppe

(d) $\boxed{R \, , \; U \, , \; V_z}$

selbst, die — wie man durch Klammerausdruckbildung nachweist — keine Glieder mit D_z enthalten kann.

Als nichtlineare Formen lassen die gefundenen Typen den unendlich fernen reellen Punkt nicht invariant; dass aber bei ihnen auch kein reeller Punkt im Endlichen in Ruhe bleibt, davon kann man sich leicht direkt überzeugen; für den ersten Typus ist freilich $\lambda \neq 0$ vorauszusetzen.

Wir gehen über zur Bestimmung aller reellen conformen Gruppen, die keinen Punkt, wohl aber eine Minimalgerade invariant lassen. Da wir uns auf die reellen Gruppen beschränken, so bleibt bei einer solchen zugleich auch die conjugierte Minimalgerade invariant. Besässe nun die eine Minimalgerade einen reellen Punkt, so müsste dieser zugleich auf der conjugierten Minimalgeraden liegen, also selbst in Ruhe bleiben. Die invariante Minimalgerade darf folglich keinen reellen Punkt enthalten. Wir haben zu untersuchen, ob alle derartigen Minimalgeraden durch reelle Transformationen der conformen Gruppe transitiv transformiert werden. Da wir wissen, dass jeder imaginäre Punkt in jeden anderen übergehen kann, so bleibt nur noch die Frage zu entscheiden, ob jede der ∞^1 Minimalgeraden durch einen solchen Punkt in jede andere dieser Schar in reeller

Weise transformiert werden kann. Wählen wir im Raume $(x_1 : x_2 : x_3 :$ $: x_4 : x_5)$ etwa den Punkt

$$x_1 + i x_2 = 0 , \quad x_3 = x_4 = x_5 = 0 ,$$

so liegen alle Erzeugenden der Mannigfaltigkeit 2. Grades

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_4 x_5$$

— die ja den Minimalgeraden im Raume (X, Y, Z) entsprechen —, soweit sie durch diesen Punkt gehen, auf der Tangentialebene durch denselben, nämlich auf

$$x_1 + i x_2 = 0 .$$

Diese schneidet die erwähnte Mannigfaltigkeit in dem zweidimensionalen Kegel

$$x_3^2 = x_4 x_5 .$$

Es erhebt sich die Frage, ob die ∞^1 Erzeugenden desselben transitiv untereinander vertauscht werden können. Wir dürfen übrigens die Gleichung auch als die eines Kegelschnittes, geschrieben in den homogenen Coordinaten $x_3 : x_4 : x_5$, auffassen. Dieser gestattet unter anderen die folgende Untergruppe der allgemeinen zehngliedrigen Gruppe:

$$x_4 p_3 + 2 x_3 p_5 , \quad x_4 p_4 - x_5 p_5 , \quad x_5 p_3 + 2 x_3 p_4 .$$

Ihre Zusammensetzung zeigt, dass sie die Punkte des Kegelschnittes dreigliedrig transformiert; insbesondere kann jeder imaginäre Punkt desselben durch eine reelle Transformation der Gruppe in jeden anderen imaginären Kegelschnittspunkt übergeführt werden. Ein reelles Wertsystem $x_3 : x_4 : x_5$ kommt für unsere Zwecke nicht in Betracht, da die zugeordnete Minimalgerade sonst einen reellen Punkt enthielte. Wir wählen den imaginären Punkt

$$x_3 - i x_4 = 0 , \quad x_5 + x_4 = 0$$

und erhalten dementsprechend die Erzeugende

$$x_1 + i x_2 = 0 , \quad x_3 - i x_4 = 0 , \quad x_5 + x_4 = 0 ,$$

welcher im Raume (X, Y, Z) die Minimalgerade

$$X + i Y = 0 , \quad Z = i$$

zugeordnet ist. Diese gestattet die siebengliedrige Gruppe

$$P + i Q , \quad D_z , \quad D_x + i D_y , \quad U - i R , \quad V_z + R , \quad V_x + 2 D_x + P ,$$
$$V_y + 2 D_y + Q$$

und demnach die folgende reelle Gruppe:

(e) $\boxed{V_x+2D_x+P, \; V_y+2D_y+Q, \; V_z+2D_z+R, \; V_z-2D_z+R}$.

Wir bezeichnen ihre Symbole mit X_1f, X_2f, X_3f, X_4f. Man überzeugt sich leicht, dass X_4f jeden Punkt jeder der beiden invarianten Minimalgeraden einzeln stehen lässt, während die Punkte der Geraden durch X_1f, X_2f, X_3f dreigliedrig transformiert werden. Eine Untergruppe, welche diese nur zweigliedrig unter einander vertauschen würde, liesse mindestens einen Punkt invariant. Es kommen also nur Untergruppen von der Form

$$X_1f+\lambda X_4f, \quad X_2f+\mu X_4f, \quad X_3f+\nu X_4f$$

in Betracht. Die Bildung der Klammerausdrücke ergiebt nur den einen Typus

(f) $\boxed{V_x+2D_x+P, \quad V_y+2D_y+Q, \quad V_z+2D_z+R}$.

Wir kommen nun zur Bestimmung aller reellen conformen Gruppen, die eine Kugel, aber keinen Punkt und keine Minimalgerade in Ruhe lassen. Besitzt die Kugel einen reellen Mittelpunkt, so kann ihre Gleichung durch reelle Translation auf die Form

$$X^2+Y^2+Z^2+\lambda=0$$

gebracht werden, und sie gestattet dann die sechsgliedrige Gruppe

$$V_x+\lambda P, \quad V_y+\lambda Q, \quad V_z+\lambda R, \quad D_x, \quad D_y, \quad D_z.$$

Nun besitzt aber die conforme Gruppe einer Kugel, wie sich zeigen lässt, keine Untergruppe, die weder eine Minimalgerade noch einen Punkt des Raumes invariant lässt; diese Eigenschaft kommt nur der sechsgliedrigen Gruppe selbst zu. Wir übergehen hier den Beweis, da sich derselbe bereits in der Knotheschen Abhandlung pag. 61—65 findet.

Ist der Mittelpunkt der invarianten Kugel nicht reell, so lässt er sich durch eine reelle Ähnlichkeitstransformation in den Punkt 0, 0, i überführen. Die zugehörige Gruppe entsteht aus der obigen durch Vertauschung von z mit $z-i$. Dadurch verliert diese ihre reelle Form; sie besitzt allenfalls nur weniger als sechsgliedrige und darum auszuschliessende reelle Untergruppen. Wir müssen uns demnach auf Kugeln mit reellem Mittelpunkt, d. h. auf den obigen Typus beschränken.

Was ferner den Radius der invarianten Kugel anbetrifft, so erkennt man, dass die Gruppe nicht mehr reell bleibt, falls dieser eine complexe Grösse ist; er muss entweder reell oder rein imaginär sein und lässt sich also durch reelle Streckung gleich 1 oder gleich i machen.

Dementsprechend erhalten wir die beiden Gruppen

$$V_x - P,\quad V_y - Q,\quad V_z - R,\quad D_x,\quad D_y,\quad D_z,$$

$$\text{(g)}\qquad \boxed{V_x + P,\quad V_y + Q,\quad V_z + R,\quad D_x,\quad D_y,\quad D_z}\,.$$

Im ersten Falle kann man die reelle Kugel natürlich auch durch die Ebene $Z = 0$ ersetzen, deren Gruppe wir bereits früher in der Form

$$\text{(h)}\qquad \boxed{P,\quad Q,\quad D_z,\quad U,\quad V_x,\quad V_y}$$

fanden.

Bevor wir uns zur Untersuchung des letzten Falles wenden, wollen wir die Frage entscheiden, mit welchen Typen der Tabelle I die gefundenen reellen Gruppen gleichberechtigt sind.

Ersetzt man in der infinitesimalen Transformation

$$D_z + \gamma U$$

z durch $z + \frac{i}{2}$, so geht sie in

$$D_z + \gamma U + \frac{i\gamma}{2} R$$

und nach Ausführung der Inversion in

$$D_z - \gamma U - \frac{i\gamma}{2} V_z$$

über. Vertauscht man jetzt z mit $z + i$, so kommt

$$\frac{i\gamma}{2}(V_z + 2iU - R) + \gamma(U + iR) - D_z \quad \text{oder}$$

$$V_z + \frac{2i}{\gamma} D_z + R\,.$$

Vermöge der eben entwickelten Umformung gehen die Gruppen (b), (c), (e), (f), (g) aus den Typen (70), (50), (15), (34), (4) der Tabelle I hervor.

Sucht man ferner die den Typen (a) und (d) entsprechenden Gruppen des linearen Complexes auf, vertauscht dort x mit y, y mit x,

z mit $-z$ und kehrt sodann in den Raum (X, Y, Z) zurück, so erkennt man die Übereinstimmung von (a) und (d) mit den Typen (14) und (30) der Tabelle.

Wir hatten früher erkannt, dass in der infinitesimalen Transformation

$$D_z + \gamma U$$

die Werte γ, $-\gamma$, $\frac{1}{\gamma}$, $-\frac{1}{\gamma}$ der willkürlichen Constanten mit einander gleichberechtigt sind. Dementsprechend ergiebt sich für den Typus

$$V_z + \lambda D_z + R$$

die Gleichberechtigung der Werte λ, $-\lambda$, $\frac{4}{\lambda}$, $-\frac{4}{\lambda}$.

Wir behaupten, dass die Überführung dieser vier Formen in einander auf reellem Wege möglich ist.

Die Inversion lässt zunächst

$$V_z + \lambda D_z + R \quad \text{in} \quad V_z - \lambda D_z + R$$

übergehen.

Ersetzt man andererseits X durch $X + 1$, so kommt

$$V_z + \lambda D_z - 2D_y - \lambda Q$$

und nach Ausführung der Inversion:

$$-R + \lambda D_z - 2D_y + \lambda V_y .$$

Vertauscht man jetzt die Variabeln Y und Z unter einander und gleichzeitig X mit $-X$, so erhält man

$$\lambda(V_z + D_y) - 2D_z - Q .$$

Ersetzt man schliesslich X durch $X + \frac{1}{2}$, so entsteht die Form

$$V_z - \frac{2}{\lambda} D_z + \frac{1}{4} R ,$$

oder nach Ausführung einer passenden Streckung:

$$V_z - \frac{4}{\lambda} D_z + R .$$

Damit ist unsere Behauptung erwiesen.

Als letzter Fall bleibt noch die dreigliedrige Gruppe zu untersuchen, die eine gewundene Minimalcurve invariant lässt; sie findet sich in der Tabelle als Typus (48) verzeichnet. Wir fragen, ob diese

sich durch irgend eine — natürlich imaginäre — conforme Transformation auf reelle Form bringen lässt. Da sie die Zusammensetzung

$$(X_1 X_2) = X_1 f, \quad (X_1 X_3) = 2 X_2 f, \quad (X_2 X_3) = X_3 f$$

besitzt, so ist bekanntermassen innerhalb der Gruppe jede ihrer infinitesimalen Transformationen gleichberechtigt mit $X_1 f$ oder $X_2 f$. $X_1 f$ aber kann, wie man aus der Tabelle der eingliedrigen Gruppen ersieht, niemals reell gemacht werden. Daraus erhellt, dass jedes der drei Symbole einer eventuell vorhandenen reellen Form unserer Gruppe mit $X_2 f \equiv 2\,U + i D_z$ gleichberechtigt sein muss. Da $X_2 f$ nur in quadratische reelle Form übergehen kann, so folgt weiter, dass die neue Gruppe keine linearen infinitesimalen Transformationen enthalten kann, sondern nur solche reelle, unter denen sich jede durch reelle Transformationen auf die Gestalt

$$V_z + D_z + R$$

bringen lässt. Wir denken uns die reelle dreigliedrige Gruppe in dieser Weise transformiert, dass eine ihrer infinitesimalen Transformationen die obige Form besitzt. Diese muss — wie überhaupt jede infinitesimale Transformation der Gruppe — mindestens einer zweigliedrigen Untergruppe der letzteren angehören. Setzen wir

$$Af \equiv V_z + D_z + R,$$

$$Bf \equiv \alpha_0 V_z + \alpha_1 V_x + \alpha_2 V_y + \alpha_3 D_x + \alpha_4 D_y + \alpha_5 D_z + \alpha_6 U + \alpha_7 P + \alpha_8 Q + \alpha_9 R,$$

wo die Constanten $\alpha_1 \ldots \alpha_9$ nicht reell zu sein brauchen, so ergiebt sich für den Klammerausdruck:

$$\begin{aligned}(AB) = {} & \alpha_3 V_y - \alpha_4 V_x - \alpha_6 V_z + 2\alpha_7 D_y - 2\alpha_8 D_x - 2\alpha_9 U + \\ & + \alpha_1 V_y - \alpha_2 V_x \qquad + \alpha_3 D_y - \alpha_4 D_x \qquad + \alpha_7 Q - \alpha_8 P + \\ & \qquad + 2\alpha_1 D_y - 2\alpha_2 D_x + 2\alpha_0 U + \alpha_3 Q - \alpha_4 P + \alpha_6 R .\end{aligned}$$

Wie die Zusammensetzung unserer dreigliedrigen Gruppe lehrt, kann $Af \sim X_2 f$ in keiner Untergruppe derselben invariant sein; wir dürfen nunmehr ohne weiteres

$$(AB) = \sigma Bf \quad (\sigma \neq 0)$$

verlangen, und daraus folgen die Bedingungen:

$$\begin{aligned}
\sigma\alpha_0 &= -\alpha_6 , & \alpha_5 &= 0 \\
\sigma\alpha_1 &= -\alpha_2 - \alpha_4 , & \sigma\alpha_6 &= -2\alpha_9 + 2\alpha_0 \\
\sigma\alpha_2 &= \alpha_1 + \alpha_3 , & \sigma\alpha_7 &= -\alpha_8 - \alpha_4 \\
\sigma\alpha_3 &= -2\alpha_8 - \alpha_4 + 2\alpha_2 , & \sigma\alpha_8 &= \alpha_7 + \alpha_3 \\
\sigma\alpha_4 &= 2\alpha_7 + \alpha_3 + 2\alpha_1 , & \sigma\alpha_9 &= \alpha_6 .
\end{aligned}$$

Die Gleichungen zwei bis fünf ergeben:

$$\alpha_4 = -\sigma\alpha_1 - \alpha_2\,, \quad 2\alpha_8 = -(\sigma^2+1)\alpha_2 + 2\sigma\alpha_1\,,$$
$$\alpha_3 = \sigma\alpha_2 - \alpha_1\,, \quad 2\alpha_7 = -(\sigma^2+1)\alpha_1 - 2\sigma\alpha_2\,.$$

Durch Substitution dieser Werte gehen die Gleichungen acht und neun über in

$$(\sigma^2+1)(+\alpha_1\sigma + 3\alpha_2) = 0\,,$$
$$(\sigma^2+1)(-\alpha_2\sigma + 3\alpha_1) = 0\,.$$

α_1 und α_2 können nicht gleichzeitig verschwinden; denn dann liesse sich aus Af und Bf eine lineare infinitesimale Transformation ableiten, die — wie wir wissen — unmöglich der gesuchten reellen Gruppe angehören kann. Die beiden Gleichungen werden also nur befriedigt durch

$$\sigma = \pm i \quad \text{oder} \quad \sigma = \mp 3i\,, \quad \alpha_2 = \pm i\alpha_1\,.$$

Wir haben noch die Gleichungen eins, sieben, zehn unseres ursprünglichen Gleichungssystems zu berücksichtigen. Diese sind linear und homogen in Bezug auf α_0, α_6, α_9. Ihre Determinante

$$\sigma(4+\sigma^2)$$

verschwindet weder für $\sigma^2 = -1$ noch für $\sigma^2 = -9$; demnach ist immer

$$\alpha_0 = \alpha_6 = \alpha_9 = 0\,.$$

Unter der Voraussetzung $\sigma = \pm i$ findet man für Bf die folgende Form:

$$Bf \equiv \alpha_1 V_x + \alpha_2 V_y + (\pm i\alpha_2 - \alpha_1)(D_x \pm iD_y) \mp i\alpha_2 P \pm i\alpha_1 Q\,.$$

Ersetzen wir jetzt α_1 durch $\alpha + i\beta$, α_2 durch $\gamma + i\delta$ — unter α, β, γ, δ natürlich reelle Zahlen verstanden —, so muss infolge der Reellität der ganzen dreigliedrigen Gruppe sowohl der mit i behaftete als auch der von i freie Teil von Bf für sich eine infinitesimale Transformation der Gruppe darstellen. Die Ausführung dieser Trennung ergiebt

$$\alpha V_x + \gamma V_y + (\mp\delta - \alpha)D_x + (-\gamma \pm \beta)D_y \pm \delta P \mp \beta Q\,,$$
$$\beta V_x + \delta V_y + (\pm\gamma - \beta)D_x + (-\delta \mp \alpha)D_y \mp \gamma P \pm \alpha Q\,.$$

Der Klammerausdruck aus diesen beiden Symbolen stellt sich in der Form

$$[\mp(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2) - 2\alpha\delta + 2\beta\gamma](V_z + R) +$$
$$+ [\pm 3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2) + 2\alpha\delta - 2\beta\gamma]D_z$$

dar. Die Vergleichung mit Af ergiebt folgende Bedingung:

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 \pm \alpha\delta \mp \beta\gamma = 0 \quad \text{oder}$$

$$(\alpha \pm \delta)^2 + (\beta \mp \gamma)^2 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = 0\,.$$

Diese Forderung wird jedoch nicht von reellen Werten der nicht sämtlich verschwindenden Constanten α, β, γ, δ erfüllt.

Wir betrachten nunmehr den Fall $\sigma = \mp 3i$, $\alpha_2 = \pm i\alpha_1$. Wir erhalten

$$Bf \equiv \alpha_1 \{V_x + 2D_x + P \pm i(V_y + 2D_y + Q)\}\,.$$

Soll allgemein eine infinitesimale Transformation

$$(\alpha + i\beta)(Mf + iNf)\,,$$

in der Mf und Nf reell seien, einer reellen Gruppe angehören, so muss sowohl

$$\alpha Mf - \beta Nf \quad \text{als auch} \quad \beta Mf + \alpha Nf$$

eine infinitesimale Transformation der Gruppe sein. Daraus folgt aber sofort, dass Mf und Nf selbst der Gruppe angehören.

Wenden wir dies auf unseren Fall an, so bleibt also nur noch zu untersuchen, ob die drei Symbole

$$V_z + D_z + R\,, \quad V_x + 2D_x + P\,, \quad V_y + 2D_y + Q$$

eine Gruppe erzeugen. Die Bildung der Klammerausdrücke zeigt, dass keine Gruppe vorliegt. Damit ist endgiltig nachgewiesen, dass keine reelle dreigliedrige Gruppe existiert, die mit dem Typus (48) gleichberechtigt ist.

Wir lassen zum Schluss die im Vorhergehenden öfters erwähnte Tabelle I folgen, in welcher die Untergruppen der zehngliedrigen Gruppe aller conformen Punkttransformationen des Raumes in übersichtlicher Weise zusammengestellt worden sind. Dabei sind die invarianten Flächen und Curven bei allen den Untergruppen hinzugefügt, welche innerhalb der allgemeinen conformen Gruppe die grössten sind, die jene Gebilde unverändert lassen.

Eine zweite Tabelle enthält nur alle reellen conformen Gruppen, die nicht durch reelle conforme Transformation in einander überführbar sind.

Tabelle I.

Die Untergruppen der Gruppe aller conformen Punkttransformationen des Raumes.

7-gliedrig:

(1) $\boxed{P,\ Q,\ R,\ D_x,\ D_y,\ D_z,\ U}$

(2) $\boxed{P+iQ,\ U,\ D_z,\ D_x+iD_y,\ V_x,\ V_y,\ V_z}$ $\{X+iY=0,\ Z=0\}$

6-gliedrig:

(3) $\boxed{P,\ Q,\ R,\ D_x,\ D_y,\ D_z}$

(4) $\boxed{P, Q, D_z, U, V_x, V_y}$ $\{Z=0\} \sim$ $\boxed{V_x+P, V_y+Q, V_z+R, D_x, D_y, D_z}$

(5) $\boxed{P, Q, R, D_x-iD_y, U-iD_z, V_x-iV_y}$ (6) $\boxed{P, Q, R, D_z, U, D_x-iD_y}$

5-gliedrig:

(7) $\boxed{P,\ Q,\ R,\ D_z,\ U}$ (8) $\boxed{P,\ Q,\ R,\ U,\ D_x-iD_y}$

(9) $\boxed{P, Q, R, U-iD_z, D_x-iD_y}$ (10) $\boxed{P, Q, R, U+iD_z, D_x-iD_y}$

(11) $\boxed{P, Q, R, D_z+\gamma U, D_x-iD_y \quad \gamma^2+1 \neq 0}$ (12) $\boxed{P,\ Q,\ D_z,\ U,\ V_x-iV_y}$

(13) $\boxed{R,\ D_z,\ U,\ P-iQ,\ D_x-iD_y}$

4-gliedrig:

(14) $\boxed{D_x,\ D_y,\ D_z,\ U} \sim \boxed{R,\ U,\ D_z,\ V_z}$ $\{X=0,\ Y=0\}$

(15) $\boxed{P+iQ, U, D_z, V_x-iV_y} \sim \boxed{D_z, V_x+2D_x+P, V_y+2D_y+Q, V_z+R}$

(16) $\boxed{P, Q, D_z, U}$ (17) $\boxed{P, Q, R, U}$

(18) $\boxed{\begin{matrix} P, Q, R, D_z + \gamma U \\ \gamma^2 + 1 \neq 0 \end{matrix}}$ (19) $\boxed{P, Q, R, U + iD_z}$

(20) $\boxed{P, Q, R, D_x - iD_y}$ (21) $\boxed{P, Q, R, U + i(D_x - iD_y)}$

(22) $\boxed{P, Q, U - iD_z, V_x - iV_y}$ (23) $\boxed{R, P - iQ, D_x - iD_y, U}$

(24) $\boxed{R, P - iQ, D_x - iD_y, U + iD_z}$ (25) $\boxed{R, P - iQ, D_x - iD_y, U - iD_z}$

(26) $\boxed{\begin{matrix} R, P - iQ, D_x - iD_y, D_z + \gamma U \\ \gamma(\gamma^2 + 1) \neq 0 \end{matrix}}$ (27) $\boxed{R, P - iQ, D_z, U}$

(28) $\boxed{R, P - iQ, D_x - iD_y, U + iD_z + P + iQ}$

(29) $\boxed{R, P - iQ, 2U + iD_z, D_x - iD_y + P + iQ}$

3-gliedrig:

(30) $\boxed{D_x, D_y, D_z} \sim \boxed{\boxed{R, U, V_z}}$ (31) $\boxed{P, Q, R}$

(32) $\boxed{P, Q, U}$ (33) $\boxed{\begin{matrix} P, Q, D_z + \gamma U \\ \gamma^2 + 1 \neq 0 \end{matrix}}$

(34) $\boxed{P + iQ, U - iD_z, V_x - iV_y}$

$\sim \boxed{\boxed{V_x + 2D_x + P, \ V_y + 2D_y + Q, \ V_z + 2D_z + R}}$

(35) $\boxed{P, Q, R + D_z}$ (36) $\boxed{R, U, D_z}$

(37) $\boxed{P, Q, U + iD_z}$ (38) $\boxed{P - iQ, D_z, U}$

(39) $\boxed{R, P - iQ, U}$ (40) $\boxed{R, P - iQ, U + iD_z}$

(41) $\boxed{R,\ P-iQ,\ U-iD_z}$ (42) $\boxed{R,\ P-iQ,\ D_z+\gamma U \quad \gamma^2+1\neq 0}$

(43) $\boxed{R,\ P-iQ,\ D_x-iD_y}$ (44) $\boxed{R, P-iQ, U+i(D_x-iD_y)}$

(45) $\boxed{R, P-iQ, U+iD_z+P+iQ}$ (46) $\boxed{R, P-iQ, D_x-iD_y+P+iQ}$

(47) $\boxed{P-iQ,\ 2U+iD_z,\ D_y+iD_x+P+iQ}$ $\{4Z-(X-iY)^2=0\}$

(48) $\boxed{D_y+iD_x+P+iQ,\ 2U+iD_z,\ 3(D_y-iD_x)+V_x-iV_y}$

$$\left\{\begin{array}{l}16Z^3+18Z(X^2+Y^2)+9(X+iY)^2-3(X-iY)^2(X^2+Y^2+Z^2)=0\\ \text{und die Curve } 4Z-(X-iY)^2=0,\ 12(X+iY)+(X-iY)^3=0\end{array}\right\}$$

2-gliedrig:

(49) $\boxed{P,\ Q}$ (50) $\boxed{D_z, U}$ $\{X^2+Y^2+\lambda Z^2=0\}\sim\boxed{V_z+R, D_z}$

(51) $\boxed{R,\ U}$ (52) $\boxed{R,\ D_z}$ $\{X^2+Y^2=1\}$

(53) $\boxed{R,\ U+iD_z}$ (54) $\boxed{R,\ D_z-\gamma U \quad \gamma(\gamma^2+1)\neq 0}$ $\left\{X^2+Y^2=e^{2\gamma \operatorname{arc\,tg}\frac{Y}{X}}\right\}$

(55) $\boxed{P-iQ,\ R}$ (56) $\boxed{P-iQ,\ D_z+iR}$ $\{Z-\log(X-iY)=0\}$

(57) $\boxed{P-iQ,\ U}$ (58) $\boxed{P-iQ,\ U+\gamma D_z \quad \gamma(\gamma^2+1)\neq 0}$ $\{X-iY+Z^{1+i\gamma}=0\}$

(59) $\boxed{P-iQ,\ U+iD_z}$ (60) $\boxed{P-iQ,\ U-iD_z}$ $\{X-iY-Z^2=0\}$

(61) $\boxed{P-iQ, D_x-iD_y+P+iQ}$ (62) $\boxed{P-iQ, P+iQ-U-iD_z}$ $\{X-iY+2\log Z=0\}$

(63) $\boxed{R,\ P-iQ+iD_z-U}$ $\{X+iY+\log(X-iY)=0\}$

(64) $\boxed{P+iQ+D_y+iD_x,\ 2U+iD_z}$ $\left\{\begin{array}{l}M[6(X+iY)+6Z(X-iY)-(X-iY)^3]^2+\\ \qquad +N[4Z-(X-iY^2]^3=0\end{array}\right\}$

$\sim\boxed{V_x-iV_y+2R,\ U+2iD_z}$ $\{X-iY=0,\quad 6X+Z^3=0\}$

1-gliedrig:

(65) $\boxed{R}\ \{X=C_1,\ Y=C_2\}$ (66) $\boxed{P-iQ}\ \{X-iY=C_1,\ Z=C_2\}$

(67) $\boxed{D_z}\ \{X^2+Y^2=C_1,\ \ Z=C_2\}\sim\boxed{\boxed{U}}\ \left\{\frac{Y}{Z}=C_1,\ \ \frac{X}{Z}=C_2\right\}$

(68) $\boxed{D_z+R}\ \left\{X^2+Y^2=C_1,\ \ Z-\operatorname{arc\,tg}\frac{Y}{X}=C_2\right\}$

(69) $\boxed{P+iQ+D_y+iD_x}\ \left\{\begin{array}{l}4Z-(X-iY)^2=C_1,\ \ 6(X+iY)+\\ +6Z(X-iY)-(X-iY)^3=C_2\end{array}\right\}$

(70) $\boxed{\begin{array}{c}D_z-\gamma U\\ \gamma(\gamma^2+1)\neq 0\end{array}}\ \left\{(X^2+Y^2):Z^2=C_1,\ \ e^{2\gamma\operatorname{arc\,tg}\frac{Y}{X}}:Z^2=C_2\right\}$

$\sim\boxed{\boxed{V_z+2\beta D_z+R}}$, wobei $\beta=-\frac{i}{\gamma}$

(71) $\boxed{U-iD_z+P-iQ}\ \{(X-iY):Z^2=C_1,\ X+iY-\log(X-iY)=C_2\}$

(72) $\boxed{U-iD_z}\ \{X+iY=C_1,\ (X^2+Y^2):Z^2=C_2\}\sim\boxed{\boxed{V_z+2D_z+R}}$

Wir wollen noch angeben, in welcher Weise die Nummern dieser Tabelle den in der Knotheschen Abhandlung aufgestellten Typen entsprechen. Wir finden dort zunächst eine Übersicht auf pag. 36—38. Setzen wir die dort aufgestellten Nummern jedesmal in Klammer hinter die entsprechenden Nummern unserer Tabelle, so äussert sich die Zusammengehörigkeit in folgender Weise:

2 (1), 5 (2), 6 (3), 7 (8), 8 (9), 9 (5), 10 (7), 11 (10), 12 (4), 13 (6), 15 (11), 16 (12), 17 (19), 18 (23), 19 (17), 20 (18), 21 (25), 22 (13), 23 (16), 24 (14), 25 (22), 26 (21), 27 (15), 28 (24), 29 (20), 31 (36), 32 (29), 33 (30), 34 (26), 35 (42), 36 (33), 37 (28), 38 (27), 39 (35), 40 (31), 41 (34), 42 (39), 43 (32), 44 (41), 45 (40), 46 (37), 47 (38), 49 (46), 50 (43), 51 (51), 52 (48), 53 (54), 54 (56), 55 (45), 56 (58), 57 (50), 58 (52), 59 (49), 60 (44), 61 (47), 62 (53), 63 (57), 64 (55), 65 (60), 66 (59), 67 (62), 68 (66), 69 (63), 70 (64), 71 (65), 72 (61).

Die den Nummern 1, 3, 4, 14, 30, 48 unserer Tabelle entsprechenden Typen finden sich bei Knothe auf pag. 57—65 aufgestellt.

Tabelle II.

Die reellen conformen Gruppen.

7-gliedrig:

$$(1') \quad \boxed{P,\ Q,\ R,\ D_x,\ D_y,\ D_z,\ U}$$

6-gliedrig:

$$(2') \quad \boxed{P,\ Q,\ R,\ D_x,\ D_y,\ D_z} \qquad (3') \quad \boxed{P,\ Q,\ D_z,\ U,\ V_x,\ V_y}$$

$$(4') \quad \boxed{V_x+P,\ V_y+Q,\ V_z+R,\ D_x,\ D_y,\ D_z}$$

5-gliedrig:

$$(5') \quad \boxed{P,\ Q,\ R,\ D_z,\ U}$$

4-gliedrig:

$$(6') \quad \boxed{D_x,\ D_y,\ D_z,\ U} \quad (7') \quad \boxed{P,\ Q,\ D_z,\ U} \quad (8') \quad \boxed{P,\ Q,\ R,\ U}$$

$$(9') \quad \boxed{P,\ Q,\ R,\ D_z+\gamma U} \qquad (10') \quad \boxed{R,\ U,\ V_z,\ D_z}$$

$$(11') \quad \boxed{V_x+2D_x+P,\ V_y+2D_y+Q,\ V_z+2D_z+R,\ V_z-2D_z+R}$$

3-gliedrig:

$$(12') \quad \boxed{P,\ Q,\ R} \quad (13') \quad \boxed{D_x,\ D_y,\ D_z} \quad (14') \quad \boxed{P,\ Q,\ U}$$

$$(15') \quad \boxed{P,\ Q,\ D_z+\gamma U} \qquad (16') \quad \boxed{P,\ Q,\ R+D_z}$$

$$(17') \quad \boxed{R,\ U,\ D_z} \qquad (18') \quad \boxed{R,\ U,\ V_z}$$

$$(19') \quad \boxed{V_x+2D_x+P,\ V_y+2D_y+Q,\ V_z+2D_z+R}$$

2-gliedrig:

(20′) $\boxed{P,\ Q}$ (21′) $\boxed{D_z,\ U}$ (22′) $\boxed{R,\ U}$ (23′) $\boxed{R,\ D_z}$

(24′) $\boxed{\begin{matrix} R,\ D_z + \gamma U \\ \gamma \neq 0 \end{matrix}}$ (25′) $\boxed{V_z + R,\ D_z}$

1-gliedrig:

(26′) $\boxed{R}$ (27′) $\boxed{D_z}$ (28′) $\boxed{U}$ (29′) $\boxed{D_z + R}$

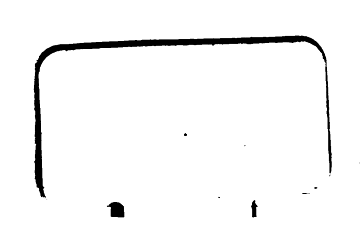
(30′) $\boxed{\begin{matrix} D_z + \gamma U \\ \gamma \neq 0 \end{matrix}}$ (31′) $\boxed{\begin{matrix} V_z + \lambda D_z + R \\ \lambda(\lambda + 2)(\lambda - 2) \neq 0 \end{matrix}}$ (32′) $\boxed{V_z + 2 D_z + R}$

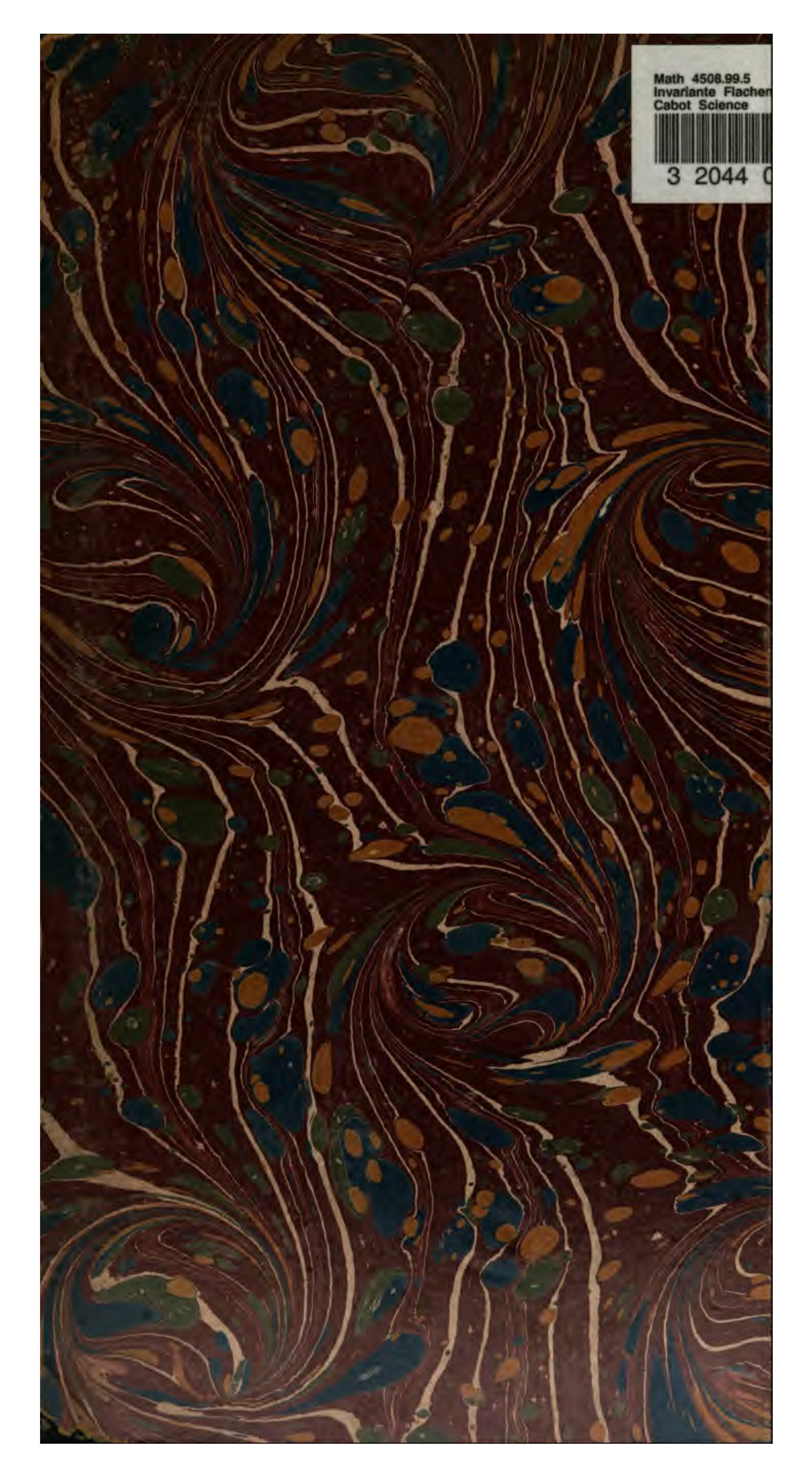
Vita.

Ich, Hugo Julius Ludwig August Stender, ev.-luth. Confession, wurde geboren am 15. September 1874 in Lamspringe bei Hildesheim. Bereits im nächsten Jahre siedelten meine Eltern mit mir nach Leipzig über. Nachdem ich hier auf der 7. Bürgerschule die nötigen Elementarkenntnisse erworben hatte, besuchte ich von Ostern 1885 an das Realgymnasium, das ich Ostern 1894 mit dem Zeugnis der Reife verliess. Ostern 1895 bestand ich an der Nikolaischule die Gymnasial-Ergänzungsprüfung. Dann widmete ich mich an der Universität Leipzig, an der ich seit Ostern 1894 immatrikuliert war, dem Studium der Mathematik und exakten Naturwissenschaften. Ich hörte Vorlesungen bei den Herren Proff. Barth, Bruns, Drude, Engel, Hofmann, Lie, Mayer, Neumann, Ostwald, Richter, Wiedemann, Wislicenus, Wundt, Zirkel sowie den Herren Dr. Hausdorff und Dr. Scheffers. Ausserdem nahm ich teil an den Übungen der Herren Proff. Lehmann, Lie, Mayer, Wiedemann, Wislicenus und Dr. Scheffers.

Allen meinen hochverehrten akademischen Lehrern, insbesondere aber den Herren Proff. Lie, Engel und Mayer bin ich für die vielfältige Unterstützung, die sie meinen Studien zu teil werden liessen, zu tiefstem Danke verpflichtet.


JAN 22




Math 4508.99.5
Invariante Flachen
Cabot Science
3 2044